

TABLE DES MATIÈRES

1 Applications linéaires	3
1.1 Définitions	4
1.2 Image. Noyau	5
1.3 Opérations sur les applications linéaires	9
1.4 Projecteurs. Symétries	10
1.5 Détermination d'une application linéaire	13
1.6 Cas de la dimension finie	15
1.7 Formes linéaires et hyperplans	17

CHAPITRE

Applications linéaires

1

Définitions

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Une application $u : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

Remarque. On peut remplacer cette définition par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

Danger :

1.

2.

Définition 2

- Un **isomorphisme** de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F .
- Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans lui-même.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
- Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.
On note $\mathcal{G}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Exemples.

1. L'application nulle $0 : \begin{cases} E & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto 0_F \end{cases}$
2. L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ $h_\lambda : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \lambda \cdot x \end{cases}$
3. L'application $P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$
4. L'application $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{A}(D, E)$, avec $a \in D$.
5. L'application $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$
6. L'application $p_i : \prod_{k=1}^p E_k \longrightarrow E_i$ qui à $(x_1, \dots, x_p)$ associe x_i

Définition 3

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable** par u si $u(F) \subset F$. Dans ce cas, la restriction de u à F sera un endomorphisme de F , noté u_F et appelé **endomorphisme induit par u sur F** .

Remarque. Ne pas confondre les notions d'endomorphisme induit et de restriction.

- La notion d'endomorphisme induit n'a de sens que si F est 1^{er}) un sous-espace vectoriel 2^e) stable par u (pour pouvoir parler d'*endomorphisme* de F).
- La notion de restriction est beaucoup plus générale :
Si f est une application d'un ensemble A vers un ensemble B , et si A' est une partie non vide de A , on définit la restriction de f à A' comme étant l'application $f_A : \begin{cases} A' & \longrightarrow B \\ x & \longmapsto f(x) \end{cases}$.

2 Image. Noyau

Théorème 1

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- a. Si E' est un sous-espace vectoriel de E , son image $u(E')$ par u est un sous-espace vectoriel de F .
- b. Si F' est un sous-espace vectoriel de F , son image réciproque $u^{-1}(F')$ par u est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration.

1.

2.

□

Définition 4

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble image de E par u est un sous-espace vectoriel de F , appelé image de u , et noté $\text{Im } u$.

Ainsi : $\text{Im } u = \{u(x) , x \in E\}$.

2. L'image réciproque de 0_F par u est un sous-espace vectoriel de E , appelé noyau de u , et noté $\text{Ker } u$.

Ainsi : $\text{Ker } u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E , u(x) = 0_F\}$.

Théorème 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. u surjective $\iff \text{Im } u = F$.
2. u injective $\iff \text{Ker } u = \{0_E\}$.

Démonstration.

1. résulte directement de la définition de l'image et de la définition de la surjectivité (d'ailleurs, cette propriété est vraie pour toute application, même non linéaire).
2. — Si u est injective et si $x \in \text{Ker } u$, alors $0_F = u(x) = u(0_E)$ d'où $x = 0_E$. Ainsi, $\text{Ker } u \subset \{0_E\}$, et puisque $\text{Ker } u$ est un sous-espace vectoriel de E , on a $\{0_E\} \subset \text{Ker } u$, d'où l'égalité.
 — Supposons $\text{Ker } u = \{0_E\}$. Alors, si x et y dans E sont tels que $u(x) = u(y)$, on a $u(x - y) = 0_F$ par linéarité, d'où $x - y \in \text{Ker } u$ d'où $x = y$: u est injective.

□

Exemple. Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E . On peut alors considérer l'application :

$$u : \begin{cases} E_1 \times \dots \times E_n & \longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto x_1 + \dots + x_n \end{cases}$$

Alors :

- u est linéaire (facile)
- $\text{Im } u = \sum_{i=1}^n E_i$. Donc u surjective $\iff E = \sum_{i=1}^n E_i$.
- u est injective si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe.
 (En effet, $\text{Ker } u = \{0_{E_1 \times \dots \times E_n}\}$ équivaut à $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, x_1 + \dots + x_n = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0$, ce qui est bien la caractérisation d'une somme directe).
- en conclusion : u bijective $\iff E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.

Théorème 3

d'isomorphisme (fondamental)

La restriction de u à tout supplémentaire de $\text{Ker } u$ est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\text{Im } u$.

Démonstration.

□

2 1 Application : Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n + 1$ scalaires deux à deux distincts et soit

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{cases}$$

Alors :

1. u est linéaire.
2. $\text{Ker } u$ est l'ensemble des multiples du polynôme $\prod_{i=0}^n (X - a_i)$ (i.e l'idéal engendré par ce polynôme)
3. La restriction de u à $\mathbb{K}_n[X]$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
4. Pour tout $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un et un seul polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 P s'appelle le polynôme interpolateur de Lagrange relatif aux points (a_i, b_i)

Démonstration.

1.

2.

3.

4.

□

On conserve les notations du théorème précédent.

Soit $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. u étant un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$, l'image réciproque par u de cette famille sera une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Notons, pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_j = u^{-1}(e_j)$. Alors L_j est le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui prend la valeur 1 en a_j et la valeur 0 en a_i si $i \neq j$.

On a donc : pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \left(\frac{X - a_i}{a_j - a_i} \right)$.

Ainsi :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, L_j(a_i) = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad P = \sum_{j=0}^n b_j L_j$$

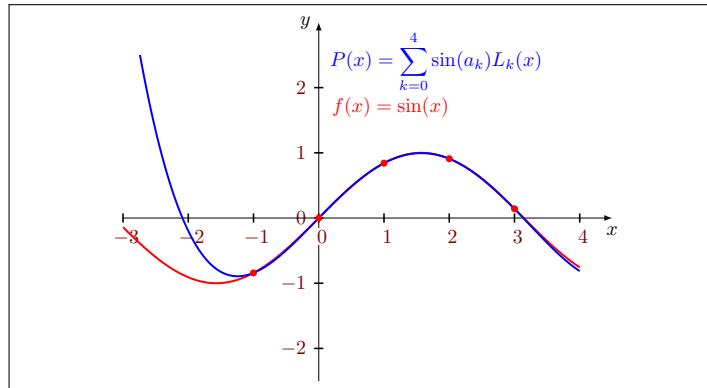
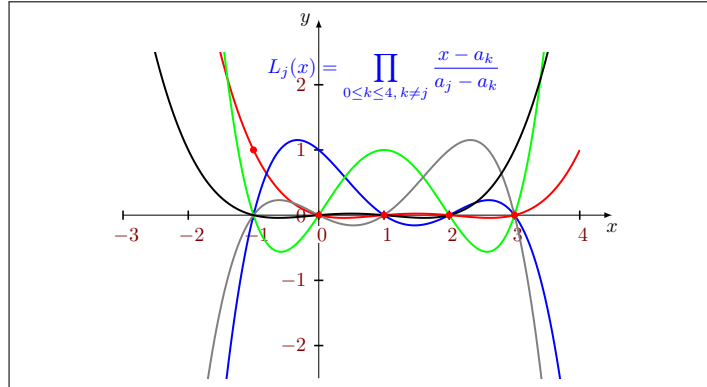
et les polynômes L_j pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ forment une *base* de $\mathbb{K}_n[X]$; dans cette base, les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ sont les $P(a_j)$.

Exemple. On considère les réels suivant :

$$a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3$$

Alors

$$\begin{aligned} L_0(X) &= (1/24)X^4 - (1/4)X^3 + (11/24)X^2 - (1/4)X \\ L_1(X) &= -(1/6)X^4 + (5/6)X^3 - (5/6)X^2 - (5/6)X + 1 \\ L_2(X) &= (1/4)X^4 - X^3 + (1/4)X^2 + (3/2)X \\ L_3(X) &= -(1/6)X^4 + (1/2)X^3 + (1/6)X^2 - (1/2)X \\ L_4(X) &= (1/24)X^4 - (1/12)X^3 - (1/24)X^2 + (1/12)X \end{aligned}$$



Théorème 5

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E, F)$.

Théorème 6

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

1. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.
2. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(v \circ u) = (\lambda v) \circ u = v \circ (\lambda u)$.
3. Si $u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors : $v \circ (u_1 + u_2) = v \circ u_1 + v \circ u_2$.
4. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(F, G)$ alors : $(v_1 + v_2) \circ u = v_1 \circ u + v_2 \circ u$.

Propriétés 1

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

1. $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$ et $\text{Ker}(v \circ u) \supset \text{Ker } u$.
2. $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \Leftrightarrow \text{Im } u \subset \text{Ker } v$.

Démonstration. Ces propriétés sont assez élémentaires, mais *importantes*

1. — Si $y \in \text{Im}(v \circ u)$ il existe $x \in E$ tel que $y = v \circ u(x)$ donc $y = v(z)$ avec $z = u(x) \in F$, d'où $y \in \text{Im } v$.
— Si $x \in \text{Ker } u$, alors $u(x) = 0_F$ d'où $v \circ u(x) = v(0_F) = 0_G$ donc $x \in \text{Ker}(v \circ u)$.
2. $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \Leftrightarrow \forall x \in E, v[u(x)] = 0_G \Leftrightarrow \forall y \in \text{Im } u, v(y) = 0_G \Leftrightarrow \forall y \in \text{Im } u, y \in \text{Ker } v \Leftrightarrow \text{Im } u \subset \text{Ker } v$.

□

Théorème 7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.
(cette algèbre n'est ni commutative, ni intègre dès que $\dim E \geq 2$).

Théorème 8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si u est un isomorphisme de E dans F , u^{-1} est un isomorphisme de F dans E .

Démonstration. Il s'agit de montrer que u^{-1} est linéaire.

Soient $x, y \in F$, et $a = u^{-1}(x)$, $b = u^{-1}(y)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $u(\lambda a + b) = \lambda u(a) + b = \lambda x + y$, d'où $u^{-1}(\lambda x + y) = \lambda a + b = \lambda u^{-1}(x) + u^{-1}(y)$. □

Remarques.

- a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On posera alors : $u^0 = \text{Id}_E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$ (itérés n -ièmes).
- b. On pourra utiliser les règles de calcul usuelles :
— $u^n - \text{Id}_E = (u - \text{Id}_E)(u^{n-1} + \dots + \text{Id}_E)$
— si u et v commutent : $u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1})$
— si u et v commutent : $(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$ (formule du binôme)
- c. Lorsque u est un isomorphisme, on peut également définir u^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

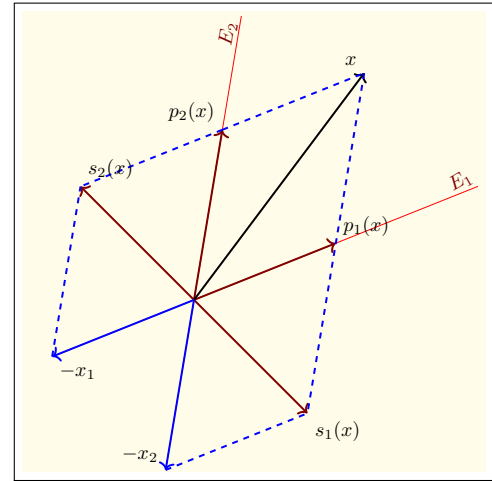
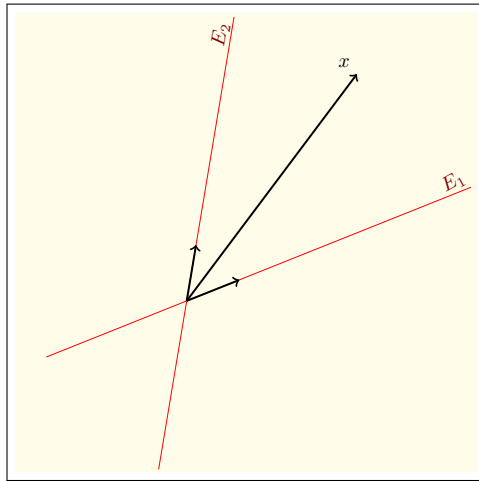
Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E ($E = E_1 \oplus E_2$).

Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc de manière unique sous la forme : $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

Définition 5

L'application $p : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x_1 \end{cases}$ s'appelle la **projection sur E_1 de direction E_2** (ou parallèlement à E_2).

L'application $s : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x_1 - x_2 \end{cases}$ s'appelle la **symétrie par rapport à E_1 de direction E_2** (ou parallèlement à E_2).



Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$\text{Inv}(u) = \{x \in E, u(x) = x\} = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $\text{Opp}(u) = \{x \in E, u(x) = -x\} = \text{Ker}(u + \text{id}_E)$

1. $s = 2p - \text{id}_E$.
2. s et p sont deux endomorphismes de E .
3. $p^2 = p \circ p = p$ (p est dit idempotent).
4. $s^2 = s \circ s = \text{Id}_E$ (s est dit involutif).
5. $\text{Inv}(p) = \text{Im } p = E_1$ et $\text{Ker } p = E_2$.
6. $\text{Inv}(s) = E_1$ et $\text{Opp}(s) = E_2$.
7. Si p_1 est la projection sur E_1 de direction E_2 , et p_2 est la projection sur E_2 de direction E_1 , $p_1 + p_2 = \text{id}_E$ (p_1 et p_2 sont dits associés).

Définition 6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. u s'appelle un **projecteur** si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 9

Si p est un projecteur, alors :

$E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$; $\text{Im } p = \text{Inv}(p)$; et p est la projection sur $\text{Im } p$ de direction $\text{Ker } p$.

□

Propriétés 3

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, E' un sous-espace vectoriel de E , et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E , tels que $E = E' \oplus E_1 = E' \oplus E_2$.
La projection de E sur E_1 de direction E' définit un isomorphisme de E_2 sur E_1 .
(ainsi, tous les supplémentaires de E' dans E sont isomorphes.)

Démonstration. En effet, si p est la projection de E sur E_1 de direction E' , d'après le théorème 3 page 6, la restriction de p à tout supplémentaire de $\text{Ker } p = E'$, par exemple E_2 , est un isomorphisme de ce supplémentaire sur $\text{Im } p = E_1$. □

Définition 7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, E' un sous-espace vectoriel de E , E' admettant un supplémentaire de dimension finie.

D'après la proposition précédente, tous les supplémentaires de E' sont alors de dimensions finies et de même dimension, appelée la **codimension** de E' , notée $\text{codim } E'$.

Remarques.

- a. Si E est de dimension finie, on a alors : $\dim E = \dim E' + \text{codim } E'$.
- b. Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension quelconque, on *admettra* que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire.

Généralisation :

Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , telle que

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i.$$

Pour tout $x \in E$, il existe donc une unique famille $(x_i) \in \prod_{i=1}^p E_i$, telle que : $x = \sum_{i=1}^p x_i$;

on note alors, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, p_i l'application : $p_i : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto x_i \end{cases}$. On a alors :

- $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $p_i \circ p_i = p_i$
- $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, p_i est la projection sur E_i de direction $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p E_j$.
- $\sum_{i=1}^p p_i = \text{id}_E$.
- $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Définition 8

On dit que $(p_i)_{1 \leq i \leq p}$ est la **famille de projecteurs canoniquement associée** à la décomposition de E en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Théorème 10

Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \text{Id}_E$), alors :
 $E = \text{Inv}(s) \oplus \text{Opp}(s)$; et s est la symétrie par rapport à $\text{Inv}(s)$ de direction $\text{Opp}(s)$.

Démonstration.

□

Remarque. La décomposition de $x \in E$ dans la somme directe $E = \text{Inv}(s) \oplus \text{Opp}(s)$ s'écrit :

$$x = \underbrace{\frac{x + s(x)}{2}}_{\in \text{Inv}(s)} + \underbrace{\frac{x - s(x)}{2}}_{\in \text{Opp}(s)}$$

Exemples.

1. Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et s l'application de E dans E qui, à toute $f \in E$, associe l'application

$$\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(-x) \end{cases} .$$

On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \text{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie.

On a :

$$- f \in \text{Inv}(s) \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x) \iff f \text{ paire ;}$$

— $f \in \text{Opp}(s) \iff \forall x \in \mathbb{R}, -f(x) = f(-x) \iff f \text{ impaire.}$

On retrouve ainsi le fait que l'ensemble des applications paires (resp. impaires) est un sous-espace vectoriel de E , et que ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires. De plus, la décomposition de $f \in E$ comme somme (de façon unique) d'une application paire et d'une application impaire est :

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{impaire}}$$

2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans $\mathbb{K}$,

et soit $s : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ A & \longmapsto {}^tA \end{cases}.$

On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \text{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie.

On a :

- $A \in \text{Inv}(s) \iff A = {}^tA \iff A \text{ symétrique ;}$
- $A \in \text{Opp}(s) \iff A = -{}^tA \iff A \text{ antisymétrique.}$

On obtient ainsi que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n et l'ensemble $\mathcal{AS}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques d'ordre n sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . De plus, la décomposition de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme somme (de façon unique) d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique est :

$$A = \underbrace{\frac{A + {}^tA}{2}}_{\text{sym.}} + \underbrace{\frac{A - {}^tA}{2}}_{\text{antisym.}}$$

5

Détermination d'une application linéaire

Théorème 11

Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , telle que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel .

Soit $(u_i)_{i \in I}$ telle que $\forall i \in I, u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$.

Alors il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I, u_i = u|_{E_i}$.

(autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à des sous-espaces vectoriels supplémentaires).

Démonstration.

— *Unicité* : Si u existe, alors pour tout $x \in E$ s'écrivant $x = \sum_{i=1}^n x_i$ avec $x_i \in E_i$, on a

$$u(x) = \sum_{i=1}^n u(x_i) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i), \text{ donc la donnée des } u_i \text{ détermine } u \text{ de façon unique.}$$

— *Existence* : Pour tout $x \in E$ s'écrivant $x = \sum_{i=1}^n x_i$ avec $x_i \in E_i$, on pose naturellement

$$u(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i). \text{ On vérifie alors facilement que } u \text{ est linéaire, et que sa restriction à chaque } E_i \text{ est bien } u_i.$$

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(b_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Alors :

1. Il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout $i \in I$.
2. u injective $\iff (b_i)_{i \in I}$ est une famille libre de F .
3. u surjective $\iff (b_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de F .
4. u est un isomorphisme $\iff (b_i)_{i \in I}$ est une base de F .
(autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une base).

Théorème 12

Démonstration.

1. Tout $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, où (λ_i) est une famille de scalaires à support fini. Si u existe, on doit donc avoir $u(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$ d'où l'unicité de u .

Réciproquement, on vérifie facilement que l'application $u : x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \mapsto \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$ est linéaire ; elle convient donc.

2. — Supposons u injective. Si on a $\sum_{i \in I} \lambda_i b_i = 0$, alors, en posant $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$, on aura $u(x) = 0$ d'où $x = 0$. Donc $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$ et tous les λ_i sont nuls puisque la famille (e_i) est libre.

Ainsi, la famille (b_i) est libre.

- Réciproquement, supposons que la famille (b_i) est libre. Soit $x \in E$ tel que $u(x) = 0$. Il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ à support fini telle que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$.

On a alors $u(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i = 0$ donc tous les λ_i sont nuls, et $x = 0$.

Ainsi, $\text{Ker } u = \{0\}$ et u est injective.

3. On remarque déjà que : $u(\text{Vect}(\{e_i, i \in I\})) = \text{Vect}(\{u(e_i), i \in I\})$ (en effet, l'image par u d'une combinaison linéaire des e_i est, par linéarité, une combinaison linéaire des $u(e_i)$).

On a donc :

$$\begin{aligned} \text{Im } u &= u(E) = u(\text{Vect}(\{e_i, i \in I\})) \\ &= \text{Vect}(\{b_i, i \in I\}) \end{aligned}$$

Donc : u surjective $\iff \text{Im } u = F \iff \text{Vect}(\{b_i, i \in I\}) = F \iff (b_i)_{i \in I}$ génératrice de F .

□

Remarque. On a démontré au passage un résultat qui est très utile :

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , $\text{Im } u$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par les $u(e_i)$.

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimensions finies :

$$\begin{cases} \text{il existe } u \text{ injective } \in \mathcal{L}(E, F) & \iff \dim E \leq \dim F \\ \text{il existe } u \text{ surjective } \in \mathcal{L}(E, F) & \iff \dim E \geq \dim F \\ \text{il existe un isomorphisme de } E \text{ sur } F & \iff \dim E = \dim F \end{cases}$$

Démonstration. Démontrons par exemple la première équivalence.

- S'il existe u injective de E dans F , et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre dans F , donc son cardinal (qui est $n = \dim E$) est $\leq \dim F$.
- Supposons $\dim E \leq \dim F$ et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Puisque $n \leq \dim F$, il existe dans F une famille libre de cardinal n , $(b_1, \dots, b_n)$. Alors, l'application linéaire u de E dans F telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout i est injective.

□

6

Cas de la dimension finie

Théorème 13

Th. de rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, avec E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\text{Im } u$ est de dimension finie et :

$$\dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Ker } u) = \dim E$$

Démonstration. C'est immédiat à l'aide du théorème 3 page 6 : si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$, alors S est isomorphe à $\text{Im } u$ (plus précisément, la restriction u_S de u à S est cet isomorphisme), donc $\dim \text{Im } u = \dim S = \dim E - \dim \text{Ker } u$ □

Remarque. Dans le cas $E = F$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont deux sous-espaces vectoriels de E dont la somme des dimensions est égale à $\dim E$, *mais* $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ ne sont pas forcément supplémentaires !

Exemple : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a ici $\text{Ker } u = \text{Im } u = \mathbb{R}e_1 \dots$

Définition 9

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\text{Im } u$ est de dimension finie, sa dimension est appelée le **rang** de u : $\text{rg } u = \dim(\text{Im } u)$.

Remarques.

- Si F est de dimension finie, alors $\text{Im } u$ est de dimension finie.
- Si E est de dimension finie, alors $\text{Im } u$ est de dimension finie et $\text{rg } u + \dim(\text{Ker } u) = \dim E$ (cf. th. précédent).
- Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , $\text{rg } u$ est aussi le rang de la famille de vecteurs $(u(e_i))_{i \in I}$.

Conséquences du théorème du rang :

- Si E est de dimension finie : u injective $\iff \text{rg } u = \dim E$.
- Si F est de dimension finie : u surjective $\iff \text{rg } u = \dim F$.
- Si E et F sont de dimensions finies et si $\dim E = \dim F$, on a :
 u injective $\iff u$ surjective $\iff u$ bijective.
- Soient E et F de dimensions finies et $\dim E = \dim F$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = \text{id}_E$. Alors u et v sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.

Démonstration. Pour les trois premières propriétés, il suffit de savoir compter...

Démontrons la quatrième : on rappelle le résultat (bien utile) suivant :

Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G
Alors : $g \circ f$ injective $\implies f$ injective et $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective

Ici, on a : $v \circ u = \text{Id}_E$ donc u est injective donc bijective puisque $\dim E = \dim F$. Ainsi u^{-1} existe et $v = v \circ u \circ u^{-1} = \text{Id}_E \circ u^{-1} = u^{-1}$. $\square$

Remarque. Les deux dernières propriétés *ne sont plus vraies* lorsque :

- $\dim E \neq \dim F$
par exemple, si $\dim E < \dim F$, il suffit de considérer une application linéaire u qui transforme une base de E en une famille libre mais non génératrice de F : u est injective, mais non surjective.
- Les espaces ne sont pas de dimensions finies (même si $E = F$)
par exemple, si $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si u est l'application qui à f associe sa dérivée f' et si v est l'application qui à f associe $\left(x \mapsto \int_0^x f(t) dt\right)$, on a $u \circ v = \text{Id}_E$ mais $v \circ u \neq \text{Id}_E$.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- u inversible.
- $\text{rg } u = n$.
- u injectif.
- u surjectif.

Propriétés 5

Remarque. Ces résultats peuvent tomber en défaut si E n'est pas de dimension finie !

Considérer par ex. les applications : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ et : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array} \right.$.
La première est surjective mais non injective ; la seconde est injective mais non surjective.

Invariance du rang par la composition avec un isomorphisme

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

- Si u est bijective, $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg } v$.
- Si v est bijective, $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg } u$.

Ce théorème (celui qui figure dans le programme) est une simple conséquence du théorème suivant, beaucoup plus général :

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, E et F étant de dimensions finies.
Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

- $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg } v$ et, si u est surjective, il y a égalité.
- $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg } u$ et, si v est injective, il y a égalité.

Démonstration.

- $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$ donc $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg } v$.
Si de plus u est surjective, on a $\text{Im}(v \circ u) = v(\text{Im } u) = v(F) = \text{Im } v$ d'où l'égalité.
- Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$. Si $r = \text{rg } u$, on peut donc extraire de cette famille une base de $\text{Im } u$, par exemple $(u(e_1), \dots, u(e_r))$.
Donc $\text{Im}(v \circ u) = v(\text{Im } u)$ est engendrée par $(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_r))$, donc est de dimension $\leq r$ soit $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg } u$.

De plus, si v est injective, $(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_r))$ est libre (une application injective transforme une famille libre en une famille libre). Donc dans ce cas $(v \circ u(e_1), \dots, v \circ u(e_r))$ est une base de $\text{Im}(v \circ u)$, d'où l'égalité.

□

Théorème 16

Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \cdot \dim F.$$

Démonstration.

□



Formes linéaires et hyperplans

Définition 10

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel H de E qui admet une droite vectorielle pour supplémentaire.

Remarque. Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, cela équivaut à $\dim(H) = n - 1$.

Propriétés 6

Si H est un hyperplan de E , alors, pour tout vecteur $a \notin H$, on a : $E = H \oplus \mathbb{K}a$.

Démonstration.

□

Définition 11

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur E une application linéaire de E dans le corps de base $\mathbb{K}$.

L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E s'appelle l'espace vectoriel dual de E , et est noté E^* .

Remarque. Si E est de dimension finie, on a : $\dim E = \dim E^*$.

Exemples.

1. Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in D$. L'application $\varphi : f \mapsto f(x_0)$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$.
2. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. L'application $\varphi : f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{C}\mathcal{M}([a, b], \mathbb{R})$.

Propriétés 7

Toute forme linéaire non nulle est surjective.

Démonstration. En effet, si $\varphi \in E^*$ est non nulle, il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) \neq 0$, et on aura alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda = \varphi\left(\frac{\lambda}{\varphi(a)} \cdot a\right) \in \text{Im } \varphi$ □

Théorème 17

1. Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$, non nulle, telle que : $H = \text{Ker } \varphi$
2. Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E telles que $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Démonstration.

1. — Soit H un hyperplan de E . Il existe $a \neq 0$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Il existe alors une forme linéaire φ sur E telle que
$$\begin{cases} \varphi(h) = 0 & \text{si } h \in H \\ \varphi(\lambda a) = \lambda & \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{K} \end{cases} \quad (\text{en effet, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires}).$$
 Si $x \in E$, il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = h + \lambda a$. On a alors $\varphi(x) = 0 \iff \varphi(h) + \lambda = 0 \iff \lambda = 0 \iff x \in H$, de sorte que l'on a bien $\text{Ker } \varphi = H$.
— Réciproquement, si φ est une forme linéaire non nulle, soit $H = \text{Ker } \varphi$. φ étant surjective, il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) = 1$. Montrons que $E = H \oplus \mathbb{K}a$, ce qui prouvera que H est un hyperplan.
— Si $x \in H \cap \mathbb{K}a$, $x \in H$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda a$. Donc $0 = \varphi(x) = \lambda\varphi(a) = \lambda$, d'où $x = 0 : H \cap \mathbb{K}a = \{0\}$.
— Si $x \in E$, on a $x = \underbrace{x - \varphi(x)a}_{=h} + \underbrace{\varphi(x)a}_{\in \mathbb{K}a}$ avec $h \in H$ puisque $\varphi(x - \varphi(x)a) = \varphi(x) - \varphi(x)\varphi(a) = 0$.
Ainsi, $E = H + \mathbb{K}a$, ce qui achève cette démonstration.
2. Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles telles que $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi$. Notons $H = \text{Ker } \varphi$. D'après ce qui précède, H est un hyperplan, donc il existe $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Posons $\lambda = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$, ce qui est possible puisque $a \notin H$ donc $\varphi(a) \neq 0$. On a alors $\psi(x) = \lambda\varphi(x)$ pour tout $x \in H$ et tout $x \in \mathbb{K}a$, donc pour tout $x \in E$.

Définition 12

Si H est un hyperplan de E et si $\varphi \in E^*$ est telle que $H = \text{Ker } \varphi = \{x \in E, \varphi(x) = 0\}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ s'appelle une équation de l'hyperplan H .

Propriétés 8

Étant donné $x \neq 0 \in E$, il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$.

Conséquence : Si x est un vecteur de E tel que, pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$, $\varphi(x) = 0$, alors $x = 0$.

Démonstration. Soit $x \neq 0 \in E$. Alors la droite vectorielle $\mathbb{K}x$ admet un supplémentaire H (on a admis l'existence du supplémentaire d'un sous-espace vectoriel dans tout espace vectoriel, même s'il n'est pas de dimension finie), et H est un hyperplan. On peut alors considérer la forme linéaire φ telle
$$\varphi \text{ telle } \begin{cases} \varphi(h) = 0 & \text{si } h \in H \\ \varphi(\lambda x) = \lambda & \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}.$$
 Il est clair que φ convient. □