0

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE

1

Intégration sur un intervalle non compact

L'objet de ce chapitre est d'étendre la notion d'intégrale au cas des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I qui n'est pas un segment i.e. de la forme :

$$]a,b]\ ,\ [a,b[\ ,\ ]-\infty,b]\ ,\ ]-\infty,b[\ ,\ [a,+\infty[\ ,\ ]a,+\infty[\ ,\ ]a,b[\text{ ou }]-\infty,\infty[$$

avec $-\infty < a < b < +\infty$.

Toutes les applications considérées ici sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Rappels cours 1ère année

Uniquement dans cette partie I désigne le segment $[a,b]$ avec $a < b$ deux réels.

Définition 1.1

Intégrale de f

Soit $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ et F une primitive de f (on sait que f admet des primitives sur I), on appelle intégrale de f sur I le réel $F(b) - F(a)$ et on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Théorème 1.1

Soient $x_0 \in I$, $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$, alors l'application $F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

Théorème 1.2

Intégration par parties

Soient $f, g \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$, on a

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Remarque. Généralement on utilise l'IPP lorsque fg' est plus facile que $f'g$ à intégrer.

Théorème 1.3

Changement de variable

Soit $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ et $\varphi : [\alpha,\beta] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\varphi([\alpha,\beta]) \subset I$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Remarque. Dans le théorème précédent, il n'y a pas d'exigence sur la monotonie de φ (bien que en général, on choisit φ strictement monotone). On verra dans les intégrales des fonctions continues par morceaux, qu'on exigera que φ soit strictement monotone.

2 Fonctions continues par morceaux

Soient $a < b$ deux réels. On rappel qu'une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ est un ensemble de points de $[a, b]$ vérifiant :

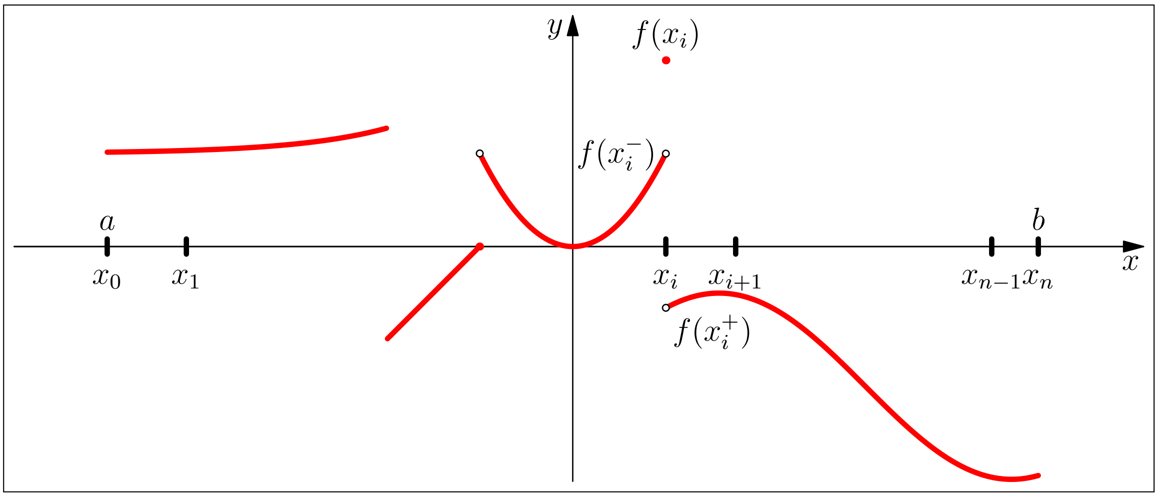
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

Définition 1.2

Soit f une application de $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{K}$; On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ tel que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$.
On dit que σ est une **subdivision adaptée** à f.

Remarques.

a. f est continue par morceaux implique que $f \in \mathscr{C}(]x_i, x_{i+1}[)$ et f admet une limite finie en x_i^+ et une limite finie en x_{i+1}^-.
b. Une fonction continue par morceaux est donc continue sur $[a, b]$ sauf en nombre fini de points de $[a, b]$, et admet des limites finies à droite et à gauche en chacun de ces points.
c. Ceci implique donc qu'une fonction continue par morceaux sur un segment est une fonction bornée, mais contrairement à une fonction continue, elle n'atteint pas forcement ses bornes.
d. La subdivision σ n'est pas unique. Et une subdivision adaptée à f doit contenir les points de discontinuité de f.



Exemple graphique d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$

Exemples.

1. La fonction $x \in [-1, 1] \longmapsto E(x)$ (partie entier de x) est continue par morceaux sur $[-1, 1]$.
2. Plus généralement une fonction en escalier sur $[a, b]$ est une fonction continue par morceaux.
3. La fonction $x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1, 1]$.

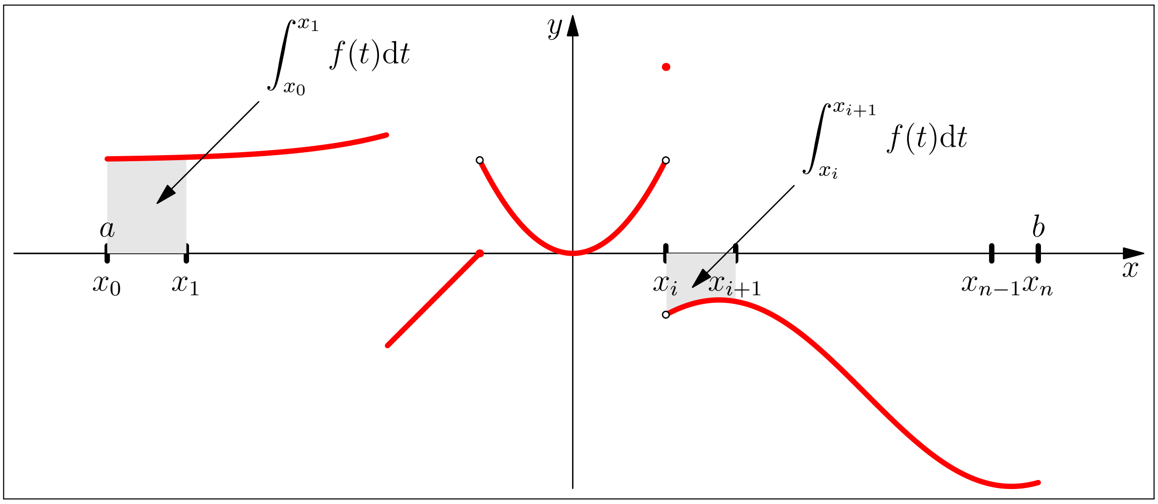
On notera dans la suite $\mathscr{C}_M([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceau sur $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{K}$.

Propriété 1.1

$\mathscr{C}_M([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$.

Démonstration. Il est clair que cet ensemble n'est pas vide (il contient la fonction nulle).
Soit f, g deux fonctions continues par morceaux et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit σ_f (resp. σ_g) une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f (resp à g). On note $\sigma = (\alpha_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la subdivision de $[a, b]$ obtenue en réordonnant les points de $\sigma_f \cup \sigma_g$, il est clair que σ est une subdivision adaptée à la fois à f et g.
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ les restrictions de f et g sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ sont prolongeables par continuité sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, il en va de même pour $\lambda f + g$. On en déduit alors que $\lambda f + g$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, ce qui termine la démonstration. $\square$

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_i)$ une subdivision adaptée à f, $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f$ a un sens (bien définie) puisque f est prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$.



On définit alors

$$I(f, \sigma) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Propriété 1.2

Soient σ_1, σ_2 deux subdivisions adaptées à f, alors $I(f, \sigma_1) = I(f, \sigma_2)$.
En d'autre terme, le scalaire $I(f, \sigma)$ ne dépend que de la fonction f.

Démonstration. Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions adaptées à f.

— On commence par le cas ou σ_2 est obtenue en ajoutant un point à σ_1 :
Notons $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$, soit $i_0 \in [\![0, n-1]\!]$ et σ_2 la subdivision obtenue en ajoutant un point x dans l'intervalle $]x_{i_0}, x_{i_0+1}[$. On a alors :

$$\begin{aligned} I(f, \sigma_2) &= \sum_{i=1}^{i_0} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_{i_0}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{x_{i_0+1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{i_0} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_{i_0}}^{x_{i_0+1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= I(f, \sigma) \end{aligned}$$

— On en déduit le même résultat lorsque σ' est obtenue à partir de σ en ajoutant un nombre quelconque de points.

— Enfin, si σ et σ' sont quelconques, notons σ'' la subdivision obtenue en réunissant tous les points de σ et σ'. Alors, $I(f, \sigma) = I(f, \sigma'')$ et $I(f, \sigma') = I(f, \sigma'')$, d'après ce qui précède, d'où le résultat.

$\square$

Remarque. En notant $a_0 = a < a_1 < \cdot < a_p = b$ les éventuels points de discontinuité de f, alors pour tout $\sigma = (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f, on a

$$n \geqslant p, \quad \forall k \in [\![0,p]\!], \;\; \exists! i_k \in [\![0,n]\!], \, a_k = x_{i_k}$$

avec $i_0 = 0 < i_1 < \cdots < i_p = n$. En utilisant donc la relation de Chasles, on trouve

$$I(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{i=i_k}^{i_{k+1}-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{x_{i_k}}^{x_{i_{k+1}}} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition 1.3

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. On appelle **intégrale de f sur $[a,b]$**, et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, (ou $\displaystyle\int_{[a,b]} f$) le scalaire $I(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 1.3

L'application : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_M([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f \end{array}\right.$ est linéaire.

Propriété 1.4

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ et $c \in]a,b[$. Alors

1. $f_{|[a,c]}$ (resp. $f_{|[c,b]}$) est une fonction continue par morceaux sur $[a,c]$ (resp. sur $[c,b]$).
2. On a la relation suivante,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Propriétés 1.5

Positivité, croissance

1. Soit $f \in \mathscr{C}_M([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
2. Soient $f, g \in \mathscr{C}_M([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Soit $f \in \mathscr{C}_M([a,b],\mathbb{K})$. On a

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Remarques.

a. Bien évidemment ces relations sont valables si les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens *i.e.* $a < b$.

b. Contrairement à une fonction continue, on peut avoir $f \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f = 0$ sans que f soit la fonction nulle. En effet, dans ce cas $f = 0$ sauf 'éventuellement' en un nombre fini de points.

c. Ceci implique que si $f, g \in \mathscr{C}_M([a,b],\mathbb{K})$ qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

Définition 1.4

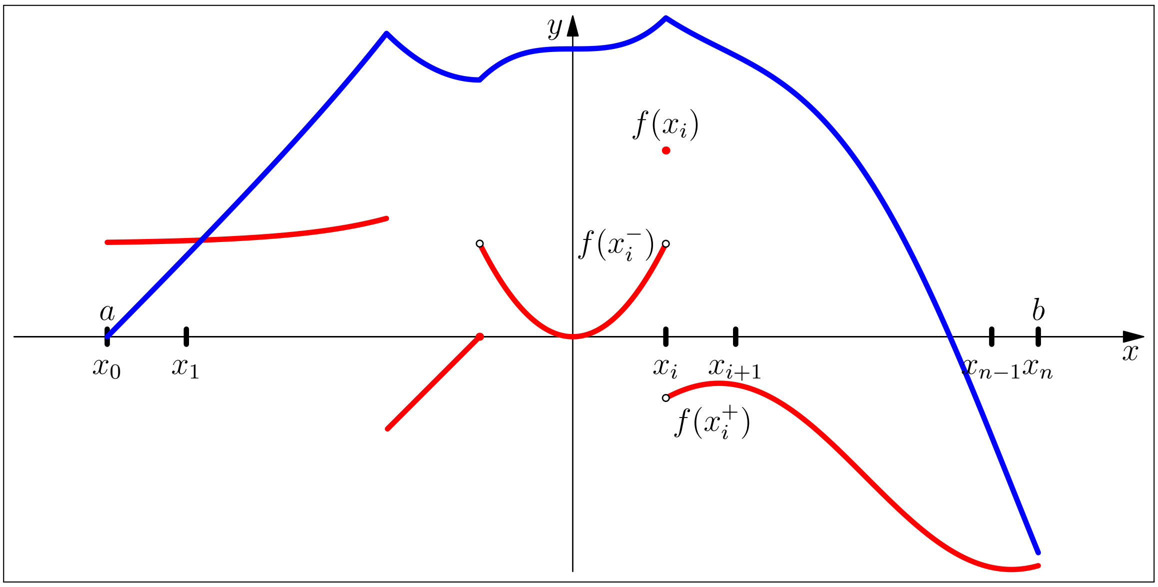
Primitive

Soit $f \in \mathscr{C}_M([a,b],\mathbb{K})$. On appelle **primitive de f** toute application $F \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ dérivable partout ou f est continue avec $F'(x) = f$.

Théorème 1.4

Soit $f \in \mathscr{C}_M([a,b],\mathbb{K})$, $x_0 \in I$. On considère la fonction $F : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$, alors :

1. F est continue sur I.
2. F est dérivable en tout point de I ou f est continue, et $F'(x) = f(x)$.



Exemple de la fonction F associée à f.

Théorème 1.5

Changement de variable

Soit $\varphi : [\alpha,\beta] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ strictement monotone et $f \in \mathscr{C}_M(\varphi[\alpha,\beta]),\mathbb{K})$. Alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

Démonstration. Comme φ est strictement monotone, elle réalise une bijection entre $[\alpha,\beta]$ et $[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$. Soit $\sigma = (y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de $[\varphi(\alpha),\varphi(\beta)]$ adaptée à f. On note alors, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $x_i = \varphi^{-1}(y_i) \in [\alpha,\beta]$, alors (x_i) est une subdivision de $[\alpha,\beta]$.
Étant donnée que f est prolongeable par continuité sur $[y_i,y_{i+1}]$ alors on peut appliquer le théorème 1.3 (relation 1.2) à f, ce qui donne

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!], \quad \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(x_i)}^{\varphi(x_{i+1})} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Ensuite, on additionne ces égalités en utilisant la relation de Chasles pour obtenir le résultat. □

Définition 1.5

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f définie sur I à valeur dans $\mathbb{K}$ est **continue par morceaux sur I** ssi pour tout segment J inclus dans I, $f \in \mathscr{C}_M(J,\mathbb{K})$. On note $\mathscr{C}_M(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeur dans $\mathbb{K}$.

3 Intégrales impropres : définitions

3.1 Intégrales impropres : définitions

Définition 1.6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}_M(I, \mathbb{K})$. On dit que $\displaystyle\int_I f$ est une **intégrale impropre**, dans les cas suivant :

1. I n'est pas borné

   ou

2. I est borné mais pas un segment, et $f \notin \mathscr{C}_M(\overline{I}, \mathbb{K})$.

L'objet alors de la suite de ce chapitre est d'étudier ce type d'intégrale afin de pouvoir confirmer leurs convergences ou divergences.

Remarque. Il est important de ne pas confondre une intégrale bien définie (I est un segment, $f \in \mathscr{C}_M(I, \mathbb{K})$) avec une intégrale impropre.

Définition 1.7

Cas d'un intervalle semi-ouvert

Soit $f \in \mathscr{C}_M([a, b[, \mathbb{K})$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On dit que **l'intégrale impropre (ou généralisée)** $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** (ou existe) si :

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{existe.}$$

S'il en est ainsi, cette intégrale est notée : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_{[a,b[} f$.

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ **diverge**.

Remarque. Dans le cas ou I est de la forme $]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < \infty$, la définition de la convergence devient :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ \textbf{converge} \text{ ssi } \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{existe.}$$

Exemples.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ est divergente. En effet, $t \longmapsto \dfrac{1}{1-t} \in \mathscr{C}_M([0, 1[, \mathbb{R})$ et
$$\forall x \in]0, 1[, \quad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \infty.$$
2. Pour tout $x > 1$, on a $x \longmapsto \frac{1}{x} \in \mathscr{C}_M([1, \infty[, \mathbb{R})$ et $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\dfrac{\pi}{2}$. Puisque $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathscr{C}_M(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et
$$\forall x > 0, \quad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^x = \mathrm{Arctan}(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \frac{\pi}{2}.$$
4. $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut -1. En effet, $\ln \in \mathscr{C}_M(]0, 1], \mathbb{R})$ et
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \int_\varepsilon^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} -1.$$

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est convergente et vaut 2.

Remarque. Comme pour les séries numériques, on fera attention pour ne pas confondre l'objet 'intégrale impropre' $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, il s'agit juste d'un symbole qui pourra avoir le statut convergence ou divergence, et il est impossible de l'utiliser dans les calculs tant que l'on n'a pas prouvé son existence, c'est-à-dire la convergence de l'intégrale.

Ex. résolu 1.1

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_0^{\infty} f$ converge. Montrer qu'il existe une suite (x_n) de réels positifs vérifiant : $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $x_n f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Correction. Comme $\displaystyle\int_0^{\infty} f$ existe, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall A > 0, \quad \exists x \geqslant A, \quad x f(x) \leqslant \varepsilon.$$

En effet, si cette relation n'est pas vérifiée, on aurait :

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \quad \exists A > 0,\ \forall x \geqslant A, \quad x f(x) > \varepsilon_0 \Longrightarrow \forall x \geqslant A, \quad \int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_A^x \frac{\varepsilon_0\,\mathrm{d}t}{t}.$$

Ce qui contredit l'hypothèse.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \geqslant n$ tel que $|x_n f(x_n)| \leqslant \dfrac{1}{n}$. Donc $\boxed{x_n f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$.

□

Théorème 1.6

Exemples de références

1. **Fonctions de Riemann**. Il s'agit des fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour $t > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
   b. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. **Exponentielle**. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$.
3. **Logarithme**. $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge (et $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = -1$).

Démonstration.

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est continue sur $]0, \infty[$ donc continue par morceaux sur $]0, 1]$ et aussi sur $[1, \infty[$. Ensuite il suffit d'utiliser une primitive,
   — Si $\alpha = 1$. Alors pour tout $x \in]0, \infty[$, on a

$$x < 1, \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \infty \text{ et } x > 1, \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

   — Si $\alpha \neq 1$, on a

$$\forall x \in]1, \infty[, \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) \text{ et } \forall x \in]0, 1[, \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right).$$

   Ainsi, si $\alpha > 1$,

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{\alpha - 1} \text{ et } \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \infty$$

   et si $\alpha < 1$,

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty \text{ et } \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \infty$$

2. La fonction $x \longmapsto e^{-ax}$ est continue sur $[0, \infty[$.
   — Si $a = 0$, alors $\int_0^x e^{-at}\,dt = x \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$.
   — Si $a \neq 0$, alors

$$\int_0^x e^{-at}\,dt = \left[\frac{e^{-at}}{-a}\right]_0^x = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-ax}\right).$$

3. $\ln \in \mathscr{C}_M(]0,1], \mathbb{R})$ et

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \int_\varepsilon^1 \ln(t)\,dt = [t\ln(t) - t]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} -1.$$

□

Corollaire 1.1

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Alors

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \quad \text{converge si et seulement si} \quad \alpha < 1$$

Propriété 1.6

Intégrale faussement impropre
Soit $f \in \mathscr{C}_M([a,b[, \mathbb{K})$ avec a et b *finis*. Si f admet une limite *finie* en b^-, alors l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ converge.

De plus, si on note $\tilde{f}$ le prolongement de f par continuité en b, on a $\int_{[a,b[} f = \int_a^b \tilde{f}$.

Démonstration. Il est clair que l'application $\tilde{f}$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. On peut donc définir l'intégrale $\int_a^b \tilde{f}$.

Pour tout $x \in [a,b[$ on a alors $\int_a^x f = \int_a^x \tilde{f}$, et, puisque l'application $x \mapsto \int_a^x \tilde{f}$ est continue sur $[a,b]$, on a $\lim_{x\to b} \int_a^x \tilde{f} = \int_a^b \tilde{f}$, d'où le résultat. □

Exemple. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln t}{1-t}\,dt$. En effet, $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{1-t} \in \mathscr{C}_M([1/2, 1[, \mathbb{R})$ et

$$\forall t \in [\frac{1}{2}, 1[, \ \frac{\ln(t)}{1-t} = -\frac{\ln(t) - \ln(1)}{t-1} \xrightarrow[t\to 1]{} -\ln'(1) = -1.$$

Remarques.

a. Ce résultat n'est pas valable si $b = \infty$, par exemple $\frac{1}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ et pourtant $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ diverge.
b. On a un résultat analogue dans le cas ou I est de la forme $]a,b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$.

Propriété 1.7

Soit $f \in \mathscr{C}_M([a,b[, \mathbb{K})$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, et soit $c \in]a,b[$. L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si l'intégrale impropre $\int_c^b f(t)\,dt$ converge et, dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Remarques.

a. Autrement dit, pour une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$, l'existence de l'intégrale dépend du comportement de f au voisinage de b.

b. Si $\int_a^b f$ converge alors $\int_x^b f \xrightarrow[x\to b^-]{} 0$.

c. Si $b=\infty$, on peut faire le lien $\int_x^\infty f$ au reste d'une série numérique et entre $\int_a^x f$ et la somme partielle d'une série numérique.

Danger

A la différence des séries numériques, il n'y pas de lien logique entre la convergence de $\int_a^\infty f$ et la limite de f nulle en ∞.

i.e. il se peut que $\int_a^{+\infty} f$ converge sans que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ soit nulle!! (c.f. exemple ci-après et l'exercice 1.6).

En revanche, ce que l'on peut affirmer : si f admet une limite non nulle en ∞ alors $\int_a^x f$ diverge.

Exemple. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

- f est continue et affine par morceaux.
- $f(0)=0$
- pour tout entier $n\geqslant 1$, $f\left(n-\dfrac{1}{2n^3}\right)=f\left(n+\dfrac{1}{2n^3}\right)=0$ et $f(n)=n$

Définition 1.8

Cas d'un intervalle ouvert

Soit $f\in\mathscr{C}_M(]a,b[,\mathbb{K})$ avec $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$. On dit que **l'intégrale impropre $\int_a^b f$ converge** ssi il existe $c\in]a,b[$ tels que les deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ sont convergentes. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire on dit que $\int_a^b f$ **diverge**.

Remarques.

a. Si $\int_a^b f$ converge, alors sa valeur ne dépend pas du choix de c, en effet dans ce cas tous les réels de l'intervalle $]a,b[$ conviennent (*c.f.* proposition 1.7).

b. $\int_a^b f$ diverge signifie que l'une au moins des intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exemples.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente, et vaut π.
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ est convergente et vaut π.
3. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.

Alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (et vaut $\frac{\pi^2}{12}$). Cependant, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ n'existe pas ! Pire, f n'est même pas bornée sur $\mathbb{R}_+$!

Ex. résolu 1.2

Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lambda$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mu$. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+1)-f(x)]\,\mathrm{d}x$ existe, et calculer sa valeur.

Correction. Puisque $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, on en déduit que $x \mapsto f(x+1)-f(x)$ est continue également. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(t+1)-f(t))\,\mathrm{d}t &= \int_a^b f(t+1)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{a+1}^{b+1} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_b^{b+1} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{a+1} f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mu$, alors il existe B tel que pour tout $t > B$, on a $|f(t)-\mu| \leqslant \varepsilon$. Supposons que $b > B$, alors

$$\forall t \in [b, b+1],\quad \mu-\varepsilon \leqslant f(t) \leqslant \mu+\varepsilon \Longrightarrow \mu-\varepsilon \leqslant \int_b^{b+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \mu+\varepsilon$$

on en déduit que $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_b^{b+1} f(x)\mathrm{d}x = \mu$. De même, on montre que $\displaystyle\lim_{a\to-\infty}\int_a^{a+1} f(x)\mathrm{d}x = \lambda$. On en déduit que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (f(x+1)-f(x))\mathrm{d}x$ existe et que

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} (f(x+1)-f(x))\mathrm{d}x = \mu-\lambda}.$$

□

Remarques.

1. Avec les hypothèses de la définition précédente, soit F une primitive de f sur $]a, b[$ et soit $c \in]a, b[$.

   Dire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^c f$ existe équivaut à dire que $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ existe ; et dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^c f = F(c) - \lim_{x\to a^+} F(x)$.

   Dire que l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f$ existe équivaut à dire que $\lim\limits_{y\to b^-} F(y)$ existe ; et dans ce cas, on a $\displaystyle\int_c^b f = \lim_{y\to b^-} F(y) - F(c)$.

   Ainsi, dire que $\displaystyle\int_a^b f$ existe équivaut à dire que F admet une limite en a^+ *et* b^- ; et dans ce cas, on aura

   $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to a^+\\ y\to b^-}} [F(t)]_x^y = \lim_{b^-} F - \lim_{a^+} F$$

   que l'on notera parfois abusivement $[F(t)]_a^b$ (mais cette écriture n'est autorisée *qu'après* avoir justifié l'existence des deux limites).
2. On prendra garde à ne pas simplifier outrageusement la définition ! Par exemple, il ne faut pas confondre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ (qui diverge !) avec $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t$ (qui vaut 0).

3 2 Intégrales impropres : propriétés

Les propriétés qui suivent sont énoncées dans le cas d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On obtient bien sûr des résultats analogues pour les deux autres cas d'intégrale impropre.

Propriété 1.8

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et λ et μ deux scalaires. On suppose que les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Alors l'intégrale impropre $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En d'autres termes : le sous-ensemble de $\mathscr{C}_M([a, b], \mathbb{K})$ formé des fonctions dont l'intégrale converge est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_M([a, b], \mathbb{K})$, et sur cet espace, l'application $f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire.

Remarques.

a. Il résulte immédiatement de la proposition précédente que, si f a une intégrale divergente sur $[a, b[$ et g une intégrale convergente, alors l'intégrale de $f + g$ sera divergente.

On ne peut cependant rien dire a priori de la somme de deux intégrales divergentes.

b. On fera très attention à ne pas écrire $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ *avant* d'avoir étudié la convergence de ces deux intégrales !

Par exemple, l'écriture $\cancel{\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}}_{\text{CV}} = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{\text{DV}} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}}_{\text{DV}}}$ N'A AUCUN SENS !!!

Comment faire alors ?

Ex. résolu 1.3

Étudier la convergence de $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)(t+3)}$ *et calculer sa valeur en cas de convergence.*

Correction. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ est continue sur $]0, \infty[$, de plus,

$$\forall x \geqslant 0, \quad \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \overset{\text{après calculs}}{=} \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{-1}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+3}.$$

Puisque on n'a pas le droit d'écrire

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)(t+3)} = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2(t+1)} - \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+2)} + \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2(t+3)}$$

car c'est faux tout simplement ! Alors, on prend $X > 0$ et on écrit

$$\begin{aligned}
\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)(t+3)} &= \int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{2(t+1)} - \int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{(t+2)} + \int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{2(t+3)} \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln(|t+1|)\right]_0^X - [\ln(|t+2|)]_0^X + \left[\frac{1}{2}\ln(|t+3|\right]_0^X \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{(X+1)(X+3)}}{X+2}\right) + \ln(2) - \ln(\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Etant donné que $\ln\left(\dfrac{\sqrt{(X+1)(X+3)}}{X+2}\right) \xrightarrow[X\to\infty]{} \ln(1) = 0$, on en déduit que

$$\int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)(t+3)} \xrightarrow[X\to\infty]{} \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Ce qui prouve la convergence de l'intégrale. □

Remarque. On verra dans la partie suivante des méthodes permettent de diagnostiquer rapidement la convergence de cette intégrale.

Propriétés 1.9

1. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$, *à valeurs réelles*.
   Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b[$ et si l'intégrale de f est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
2. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs réelles.
   Si $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a, b[$ et si les intégrales de f et de g convergent, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. immédiat, compte tenu de la propriété similaire pour les intégrales sur un segment et du théorème de prolongement des inégalités pour les limites. □

Propriété 1.10

Soit f une fonction *continue* sur $[a, b[$, *à valeurs réelles positives*, telle que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente.

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$ sur $[a, b[$.

Démonstration. Soit $x \in [a, b[$. Puisque $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f$, que $\displaystyle\int_a^x f$ est positive d'après les propriétés des intégrales sur un segment et que $\displaystyle\int_x^b f$ est positive d'après la proposition précédente, l'égalité $\displaystyle\int_a^b f = 0$ implique $\displaystyle\int_a^x f = 0$. Il ne reste plus alors qu'à appliquer le théorème correspondant pour les intégrales sur un segment. □

Propriété 1.11

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Pour que l'intégrale de f sur $[a, b[$ soit convergente, il faut et il suffit que les intégrales de $\mathrm{Re}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$ le soient, et, dans ce cas on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathbf{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

Corollaire 1.2

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, il en est de même de $\displaystyle\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$ et on a

$$\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

3 3 Cas des fonctions positives

Étudier la nature d'une intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, avec f continue par morceaux sur $[a, b[$, est facile lorsqu'on sait déterminer une primitive F de f. En effet, dans ce cas, il suffit de calculer la limite de F en b^-.

Cela est malheureusement rarement le cas ; l'idée est alors de comparer la fonction f à des fonctions de référence.

On commence par établir ces critères dans le cas de fonctions à valeurs réelles positives. En effet, si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est à valeurs positives, l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante sur

$[a, b[$. D'après le théorème de la limite monotone, sa limite en b^- existe si et seulement si elle est majorée.

On obtient donc le théorème suivant, élémentaire mais fondamental puisqu'il est à l'origine de toutes les règles de comparaison qui vont suivre :

Théorème 1.7

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles **positives**.

Soit F l'application $F : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si F est majorée.

Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} F(x)$. Dans le cas contraire, $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Remarque. Dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, b]$ avec $-\infty \leqslant b < a < +\infty$ et à valeurs réelles positives, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *décroissante* (vérification facile). Elle admet donc une limite en a^+ si et seulement si elle est majorée : on obtient donc un résultat tout à fait similaire. Pour cette raison, les théorèmes de comparaison qui vont suivre restent entièrement valables dans le cas où l'intervalle d'intégration est de la forme $]a, b]$.

On déduit facilement de ce théorème le premier critère de comparaison :

Théorème 1.8

Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles.

On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que :

$$\forall t \in [c, b[\ ,\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$$

Alors :

a. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

b. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Démonstration. Il suffit de démontrer la première propriété, puisque la seconde en est simplement la contraposée.

Pour tout $x \in [c, b[$, notons $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Si on suppose que $\displaystyle\int_a^b g$ converge on aura alors :

$$\forall x \in [c, b[\ ,\ F(x) \leqslant G(x) \leqslant \int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Ainsi, la fonction F est majorée ; f étant à valeurs positives sur $[c, b[$, on déduit du théorème 1.7 que l'intégrale $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc aussi convergente d'après la proposition 1.7. $\square$

Rapport du jury

CCP 2014, 2015,.. Certains éprouvent des difficultés à montrer la convergence d'une série ou d'une intégrale sur des exemples simples (et classiques). L'utilisation des théorèmes de comparaison, pour les séries ou les intégrales impropres, sans se soucier des questions de signe est sanctionnée.

Corollaire 1.3

Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles, *positives* au voisinage de b.

1. Si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{O}(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{o}(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque. Comme la nature d'une intégrale ne change pas si on multiplie la fonction par un scalaire, on peut, dans les hypothèses de ce corollaire, remplacer la phrase « f et g sont positives au voisinage de b » par « f et g sont de signes constants au voisinage de b »

Danger

Comme pour les séries numériques, il faut s'assurer que f et g sont de signe constant au voisinage de b.

Considérons l'exemple : $f(t) = \dfrac{|\sin(t)|}{t}$, $g(t) = \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$, *on a bien* $f \underset{\infty}{=} \mathrm{o}(g)$, *pourtant,* $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge (c.f. exercice 1.7) et* $\displaystyle\int_1^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge (c.f. exercice 1.5).*

Corollaire 1.4

Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs réelles. On suppose g positive au voisinage de b. S'il existe une constante réelle $k \neq 0$ telle que $f \underset{b^-}{\sim} kg$, alors les intégrales de f et g sur $[a, b[$ sont de même nature.

Démonstration. Quitte à changer f en $-f$ (ce qui ne change pas la nature de l'intégrale), on peut supposer $k > 0$.

Par définition, on a : $f \underset{b^-}{\sim} kg \iff f - g \underset{b^-}{=} \mathrm{o}(g)$, ce qui s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists c \in [a, b[\text{ tq } \forall x \in [c, b[\ ,\ |f(x) - kg(x)| \leqslant \varepsilon\, |g(x)|\ .$$

g étant à valeurs positives, cela peut aussi s'écrire

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists c \in [a, b[\text{ tq } \forall x \in [c, b[\ ,\ -\varepsilon g(x) \leqslant f(x) - kg(x) \leqslant \varepsilon g(x)$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists c \in [a, b[\text{ tq } \forall x \in [c, b[\ ,\ (k - \varepsilon) g(x) \leqslant f(x) \leqslant (k + \varepsilon) g(x)\,.$$

En choisissant $\varepsilon = \dfrac{k}{2}$ (ce qui est possible car $k > 0$), on obtient finalement

$$\exists c \in [a, b[\text{ tq } \forall x \in [c, b[\ ,\ \frac{k}{2} g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3k}{2} g(x)$$

et le résultat est donc une conséquence immédiate du théorème 1.8. □

Remarque. La condition « de signe constant » est indispensable. *c.f.* exemple ci-après.

Exemple. On pose $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + \dfrac{|\sin(t)|}{t}$ et $g(t) = \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$. On a $f \underset{\infty}{\sim} g$ mais leurs intégrales ne sont pas de même nature.

Corollaire 1.5

Soit $f \in \mathscr{C}_M([a,\infty[,\mathbb{R})$ à **valeurs positives** (au mois au voisinage de ∞). Alors

1. On suppose qu'il existe $k > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{k}{t^\alpha}$.
   Si $\alpha > 1$ alors $\displaystyle\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, sinon ($\alpha \leqslant 1$) $\displaystyle\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
2. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $f(t) = \underset{t\to\infty}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ ou $f(t) = \underset{t\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$, alors $\displaystyle\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
3. S'il existe $k > 0$ et $\alpha \leqslant 1$ tels que $f(t) \geqslant \dfrac{k}{t^\alpha}$ au voisinage de ∞ alors $\displaystyle\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Exemple. Dans l'exercice 1.3, on a $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^3}$ donc d'après le résultat précédent $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Remarque.

a. On peut facilement adapter ce résultat au cas ou $I = [a,b[$ avec b fini, en utilisant les fonctions de références $\dfrac{1}{(t-b)^\alpha}$

b. On peut obtenir le 3ème cas en montrant que $xf(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$.

Corollaire 1.6

Soient $a > 0$ et $f \in \mathscr{C}_M(]0,a],\mathbb{R})$ à **valeurs positives** (au mois au voisinage de 0^+). Alors

1. On suppose qu'il existe $k > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{k}{t^\alpha}$.
   Si $\alpha < 1$ alors $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, sinon ($\alpha \geqslant 1$) $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.
2. S'il existe $\alpha < 1$ tel que $f(t) = \underset{t\to 0}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ ou $f(t) = \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$, alors $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
3. S'il existe $k > 0$ et $\alpha \geqslant 1$ tels que $f(t) \geqslant \dfrac{k}{t^\alpha}$ au voisinage de 0 alors $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Remarque. On peut facilement adapter le résultat précédent au cas ou $I =]a,b]$ avec a fini, en utilisant les fonctions de références $\dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$.

4 Techniques de calcul d'une intégrale impropre

4 1 Utilisation de primitives

Il s'agit de la façon la plus simple pour étudier et calculer une intégrale impropre et c'est celle que nous avons utilisée jusqu'à présent ; elle consiste à revenir simplement à la définition :

Théorème 1.9

Si f est continue par morceaux sur $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, et si F est une primitive de f, alors f est intégrable sur $]a,b[$ si et seulement si F admet des limites finies en a^+ et en b^-, et on a alors :

$$\int_{]a,b[} f = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Ex. résolu 1.4

Montrer que la fonction $x \mapsto \ln \dfrac{1}{x-x^2}$ est intégrable sur $]0,1[$ et calculer son intégrale.

Correction. Soit ε et x dans $]0,1[$.

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^x \ln \frac{1}{t-t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^x \Big(-\ln t - \ln(1-t)\Big)\,\mathrm{d}t = \Big[-t\ln t + t + (1-t)\ln(1-t) - 1 + t\Big]_\varepsilon^x \\ &= F(x) - F(\varepsilon) \quad \text{avec} \quad F(x) = -x\ln x + (1-x)\ln(1-x) + 2x - 1 \end{aligned}$$

$\lim\limits_0 F = -1$; $\lim\limits_1 F = 1$; d'où : $\displaystyle\int_0^1 \ln \frac{1}{x-x^2}\,\mathrm{d}x = 2.$ □

4 2 Intégration par parties

Pour déterminer la nature d'une intégrale impropre on utilise des fois la méthode d'intégration par parties. Toutefois dans ce cas, il faut être prudent, une intégration par parties peut poser des problèmes. En effet, soient f et g deux applications continues et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur un intervalle $[a,b[$. La formule d'intégration par parties donne, pour tout $x \in [a,b[$:

$$\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Il se peut alors que $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ existe sans que $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ existe ! Tout dépend en fait de $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)g(x)$...

Théorème 1.10

Soient $f,g \in \mathscr{C}^1([a,b[,\mathbb{K})$ avec $-\infty < a < b \leqslant \infty$. On suppose que fg **admet une limite finie en** b. Alors

a. Les intégrales $\displaystyle\int_a^b fg'$ et $\displaystyle\int_a^b f'g$ sont de même nature.

b. Si l'une d'elles converge, alors

$$\int_a^b f(t)g'(t) = \lim_{x\to b}(f(x)g(x)) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple. Considérons l'exemple classique $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

On pose $f(t) = -\cos(t)$, $g(t) = \dfrac{1}{t}$, comme $f(t)g(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, on en déduit alors que

$$\int_1^\infty \frac{\sin(t)}{t} \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ sont de même nature.}$$

Remarque. En général, on utilise IPP lorsque le calcul de la primitive de $\varphi = f'g$ est plus facile que celui de fg'. Ceci reste valable pour les intégrales impropres.
Ainsi il faut avoir *le bon sens* pour faire le choix de f et g *i.e.* il faut qu'on puisse déterminer la nature de $\displaystyle\int fg'$ facilement !

Dans l'exemple précédent, on aurait pu écrire :

$$\forall X > 1, \quad \int_1^X \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = [\sin(x)\ln(x)]_1^X - \int_1^X \cos(x)\ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Un tel choix (bien que la formule est correcte !) ne permet pas de déterminer la nature de l'intégrale.

Ex. résolu 1.5

Nature de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Correction. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,\infty[$, de plus $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 f$ existe.

Soit $X > 1$, on a

$$\int_1^X f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(x)}{\sqrt{x}}\right] + \int_1^X \frac{\cos(x)}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x = \cos(1) - \frac{\cos(X)}{\sqrt{X}} + \int_1^X \frac{\cos(x)}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x.$$

Or, $\dfrac{\cos(X)}{\sqrt{X}} \xrightarrow[X\to\infty]{} 0$ et

$$\int_1^X \left|\frac{\cos(x)}{\sqrt{x^3}}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_1^X \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int_1^X \frac{\cos(x)}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x < \infty$$

$\square$

4.3 Changement de variable

On peut étendre aux intégrales sur un intervalle quelconque la formule de changement de variable vue pour les intégrales sur un segment ; la seule restriction, pour garantir l'existence des intégrales écrites, est que le changement de variable effectué soit bijectif ; cette restriction n'en est pas vraiment une, car on a de toutes façons intérêt lorsqu'on réalise un changement de variable à ce qu'il soit bijectif.

Théorème 1.11

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $]\alpha,\beta[$ à valeurs réelles ou complexes, et φ une bijection d'un intervalle $]a,b[$ sur $]\alpha,\beta[$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$ (autrement dit, φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]a,b[$ sur $]\alpha,\beta[$).

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ est convergente si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f\circ\varphi)\varphi'$ l'est, et, dans ce cas :

$$\int_\alpha^\beta f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f\circ\varphi\,(u)\cdot\varphi'(u)\ \mathrm{d}u.$$

Ex. résolu 1.6

Nature de $\displaystyle\int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.

Correction. On pose $\varphi(t) = \sqrt{t}$, $\varphi \in \mathscr{C}^1(]0,\infty[)$ et $\varphi'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}} > 0$ donc φ est un changement de variable bijectif de $]0,\infty[$ sur $]0,\infty[$.

Donc $\displaystyle\int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^\infty \sin(\varphi(t)^2)\varphi(t)'\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, or

$$\int_0^\infty \sin(\varphi(t)^2)\varphi(t)'\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin(\sqrt{t}^2)\frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

D'après l'exercice 1.5, cette dernière intégrale est convergente, on en déduit alors que $\int_0^{\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge. $\square$

Remarques.

a. Cet exemple montre encore qu'on peut avoir $\int_a^b f$ converge sans que f admet une limite en b.

b. En utilisant différentes méthodes, (*c.f.* Intégrales à paramètres chapitre **??**), on peut montrer que

$$\int_0^{\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

5 Intégrales absolument convergentes

5.1 Définitions

Lorsqu'une fonction n'est pas à valeurs réelles positives (ou de signe constant), les théorèmes de comparaison vus plus haut ne s'appliquent pas. On peut cependant s'y ramener dans certains cas grâce à la définition et au théorème suivants :

Définition 1.9

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a,b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Lorsque l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, on dit aussi que f est **intégrable** sur $[a,b[$.

Remarque. On a une définition analogue dans le cas d'une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a,b]$ ou $]a,b[$.

Théorème 1.12

Soit $f \in \mathscr{C}_M([a,b[,\mathbb{K})$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Si l'intégrale $\int_a^b f$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et on a

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration.

— Premier cas : f est à valeurs réelles

Notons alors, pour tout $t \in [a,b[$:

$$f^+(t) = \max(f(t),0) \quad \text{et} \quad f^-(t) = \max(-f(t),0)$$

de sorte que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-$$

Puisque $f^+ \leqslant |f|$ et $f^- \leqslant |f|$, il résulte des théorèmes de comparaison que les intégrales $\int_a^b f^+$ et $\int_a^b f^-$ existent.

Puisque $f = f^+ - f^-$, l'intégrale de f sur $[a,b[$ existe donc.

— Cas général

Lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, puisque $|\mathrm{Re}(f)| \leqslant |f|$ et $|\mathrm{Im}(f)| \leqslant |f|$, il résulte des théorèmes de comparaison que les intégrales de $\mathrm{Re}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$ sont absolument convergentes.

D'après la première partie, elles sont donc convergentes, et on en conclut que $\displaystyle\int_a^b f$ converge aussi.

□

Remarque. La réciproque du théorème précédent est *fausse*.Il existe en effet des intégrales qui sont convergentes sans être absolument convergentes (une telle intégrale est dite **semi-convergente**).

Le contre-exemple est classique et doit être connu :

Ex. résolu 1.7

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t$ *est divergente.*

Correction. La fonction $t \longmapsto \left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right|$ est continue sur $]0, \infty[$ de plus elle admet une limite finie en 0^+, donc $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t$ converge.

D'autre part, comme $|\sin(t)| \in [0, 1]$, on en déduit que $|\sin(t)| \geqslant \sin^2(t)$, ce qui donne

$$\forall X > 1, \quad \int_1^X \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \geqslant \int_1^X \frac{\sin^2(t)}{t} \mathrm{d}t = \int_1^X \left(\frac{1-\cos(2t)}{2t}\right) \mathrm{d}t,$$

or $\displaystyle\int_1^X \frac{\cos(2t)}{2t} \mathrm{d}t$ tend vers une limite finie lorsque X tend vers ∞ (en effet, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(t)}{t} \mathrm{d}t$ converge, démonstration similaire à l'exercice 1.5), tandis que $\displaystyle\int_1^X \frac{1}{2t} \mathrm{d}t = \ln(\sqrt{X}) \xrightarrow[X\to\infty]{} \infty$.

Ce qui donne $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1-\cos(2t)}{2t} \mathrm{d}t$ diverge et par conséquent $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge.

Conclusion $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t$ diverge. □

Corollaire 1.7

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}_M(]a, b[, \mathbb{K})$ on suppose que f est bornée sur $]a, b[$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

Démonstration. D'après l'hypothèse, on a

$$\exists M > 0, \forall x \in]a, b[, |f(x)| \leqslant M \Longrightarrow \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x = (b-a)M$$

Ce qui prouve le résultat. □

Exemple. La fonction $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$ et bornée sur $]0, 1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

On remarque dans cet exemple que f n'admet pas de limite en 0^+.

Théorème 1.13

Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b[$, avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. On suppose que g à valeurs réelles **positives** au voisinage de b.

1. Si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{O}(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergent.
2. Si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{o}(g)$ et si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Démonstration. En effet, la relation $f \underset{b^-}{=} O(g)$ (par exemple) équivaut à $|f| \underset{b^-}{=} O(g)$. Il résulte alors du critère de comparaison pour les fonctions à valeurs réelles positives que $\int_a^b |f|$ est convergente, d'où le résultat. □

Corollaire 1.8

Règle de Riemann
Soit $f \in \mathscr{C}_M([a, \infty[)$. On suppose,

$$\exists \alpha > 1, \quad \text{tel que } f \underset{\infty}{=} O(\frac{1}{x^\alpha}) \text{ ou } f \underset{\infty}{=} o(\frac{1}{x^\alpha})$$

Alors $\int_a^\infty f$ **est absolument convergente.**

Par analogie,

Corollaire 1.9

Règle de Riemann
Soit $f \in \mathscr{C}_M(]0, a])$. On suppose,

$$\exists \alpha < 1, \quad \text{tel que } f \underset{\infty}{=} O(\frac{1}{x^\alpha}) \text{ ou } f \underset{\infty}{=} o(\frac{1}{x^\alpha})$$

Alors $\int_0^a f$ **est absolument convergente.**

Exemples.

1. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$.
2. Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{x}\right) dx$ avec $a \in \mathbb{R}$.

5 2 Norme de la convergence en moyenne

Propriété 1.12

L'ensemble des fonctions continues par morceaux et **intégrables** sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ constitue un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_M(I, \mathbb{K})$, noté $L^1(I, \mathbb{K})$, et l'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Démonstration. La seule chose à démontrer est que si les intégrales de f et de g, éléments de $\mathscr{C}_M(I, \mathbb{K})$ sont absolument convergentes et si λ est un scalaire, alors l'intégrale de $\lambda f + g$ est absolument convergente.
Cela résulte directement de l'inégalité : $|\lambda f + g| \leqslant |\lambda|\,|f| + |g|$ et des théorèmes de comparaison.
□

Théorème 1.14

1. On note E_1 L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, *i.e.* $E_1 = \mathscr{C}(I, \mathbb{K}) \cap L^1(I, \mathbb{K})$. Alors E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(I, \mathbb{K})$.
2. L'application $N_1 : f \mapsto \int_I |f|$ est une norme sur E_1, appelée **norme de la convergence en moyenne**.
3. La forme linéaire $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire continue sur l'espace vectoriel normé (E_1, N_1).

Démonstration.

1. Même démonstration que dans la proposition précédente.
2. — pour tout $f \in E_1$, $N_1(f) \geqslant 0$;
   — si $N_1(f) = 0$, comme la fonction $|f|$ est continue et positive sur I, elle est nulle sur I et la fonction f aussi ;
   — pour tout $f \in E_1$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N_1(\lambda f) = |\lambda| N_1(f)$;
   — pour tout $(f, g) \in E_1^2$,
$$N_1(f+g) = \int_I |f+g| \leqslant \int_I (|f| + |g|) = \int_I |f| + \int_I |g| = N_1(f) + N_1(g).$$
3. La continuité de l'application $\varphi : f \mapsto \int_I |f|$ résulte de l'inégalité : $|\varphi(f)| \leqslant N_1(f)$ et de la caractérisation d'une application linéaire continue.

□

5 3 Norme de la convergence en moyenne quadratique

On suppose dans cette partie que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 1.10

Une fonction f continue par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite **de carré intégrable** si $|f|^2$ est intégrable sur I.
On note $L^2(I, \mathbb{R}) = \{f \in \mathscr{C}_M(I, \mathbb{R}), \text{t.q. } |f|^2 \in L^1(I, \mathbb{R})\}$.

Théorème 1.15

1. $L_2(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}_M(I, \mathbb{R})$.
2. L'ensemble des fonctions continues de carré intégrable sur I constitue un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, que l'on note E_2.
3. L'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E_2^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_I fg \end{array} \right.$ définit un produit scalaire sur E_2.
4. La norme associée à ce produit scalaire est appelée **norme de la convergence en moyenne quadratique** :
$$\forall f \in E_2^2 \ , \ N_2(f) = \left(\int_I |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exemples.

a. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}} \in E_1(]0, 1], \mathbb{R})$ mais $f \notin E_2(]0, 1], \mathbb{R})$.

b. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x} \notin E_1([1, \infty[, \mathbb{R})$ mais $f \in E_2(]0, 1], \mathbb{R})$.

Propriété 1.13

Le produit de deux fonctions f et g continues de carré intégrable sur I est intégrable sur I et :
$$|\langle f \, , \, g \rangle| = \left| \int_I fg \right| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f) N_2(g).$$

Démonstration. $N_1(fg)$ est le produit scalaire de $|f|$ et $|g|$; d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$N_1(fg) \leqslant N_2(|f|) N_2(|g|) = N_2(f) N_2(g).$$

□

Corollaire 1.10

Le produit scalaire $(f, g) \mapsto \langle f \, , \, g \rangle$ est une application continue de $E_2(I, \mathbb{R})^2$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Il suffit d'écrire $\langle f \, , \, g \rangle = \dfrac{1}{4} (N_2(f+g)^2 - N_2(f-g)^2)$. □