

Applications linéaires

B. ATFEH

Lycée Jacques Amyot, Auxerre

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v. Une application $u : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Remarque

On peut remplacer cette définition par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$$

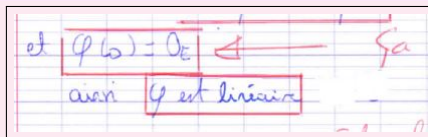
ou par : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2,$

$$u(x + y) = u(x) + u(y) \text{ et } u(\lambda x) = \lambda u(x)$$

Danger

- ① Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f(0_E) = 0_F$, mais pour montrer que f est linéaire on ne calcul pas $f(0_E)$!
- ② On ne doit pas confondre
une application linéaire et un s-e-v i.e. les phrases de types :
 f est non vide, f est stable par l'addition, etc...
n'ont aucune sens!!!

Danger



Danger

On pose (x, y, z) et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

• $f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$

Donc f est non nulle.

Définition

- Un **isomorphisme** de E dans F est une application linéaire bijective de E dans F .
- Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans lui-même.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

- Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.

On note $\mathcal{G}l(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Exemples

- ① L'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$, $h_\lambda : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto \lambda \cdot x \end{cases}$
- ② L'application $P \mapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$
- ③ L'application $f \mapsto f(a)$ de $\mathcal{A}(D, E)$, avec $a \in D$.
- ④ L'application $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$
- ⑤ L'application $p_i : \prod_{k=1}^p E_k \longrightarrow E_i$ qui à $(x_1, \dots, x_p)$ associe x_i

Définition

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, un s-e-v F de E est dit **stable** par u si $u(F) \subset F$.

Dans ce cas, la restriction de u à F sera un endomorphisme de F , noté u_F et appelé **endomorphisme induit par u sur F** .

Remarque

Ne pas confondre les notions d'**endomorphisme induit** et de **restriction**.

La notion d'endomorphisme induit n'a de sens que si F est un **s-e-v** ET **stable par u** (pour pouvoir parler d'*endomorphisme* de F).

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- 1 Si E' est un s-e-v de E , son image $u(E')$ par u est un **s-e-v de F** .
- 2 Si F' est un s-e-v de F , son image réciproque $u^{-1}(F')$ par u est un **s-e-v de E** .

Démonstration

Exercice à faire.

Définition

- ① Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble image de E par u est un s-e-v de F , appelé **image** de u , et noté $\text{Im } u$.

$$\text{Im } u = \{u(x) \mid x \in E\}.$$

- ② L'image réciproque de 0_F par u est un s-e-v de E , appelé **noyau** de u , et noté $\text{Ker } u$.

$$\text{Ker } u = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}.$$

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- ① u surjective $\iff \text{Im } u = F$.
- ② u injective $\iff \text{Ker } u = \{0_E\}$.

Exemple

Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E . On peut alors considérer l'application :

$$u : \begin{cases} E_1 \times \dots \times E_n & \longrightarrow E \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto x_1 + \dots + x_n \end{cases}$$

Alors :

Exemple

- u est linéaire
- $\text{Im } u = \sum_{i=1}^n E_i$. Donc u surjective $\iff E = \sum_{i=1}^n E_i$.
- u est injective si et seulement si la somme $\sum_{i=1}^n E_i$ est directe. (En effet, $\text{Ker } u = \{0_{E_1 \times \dots \times E_n}\}$ équivaut à $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, x_1 + \dots + x_n = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0$, ce qui est bien la caractérisation d'une somme directe).
- en conclusion : u bijective $\iff E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$.

Théorème

d'isomorphisme

La restriction de u à tout supplémentaire de $\text{Ker } u$ est un **isomorphisme** de ce supplémentaire sur $\text{Im } u$.

Démonstration

*Soit S un supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E : $E = S \oplus \text{Ker } u$.
Soit v la restriction de u à S .*

- *v est évidemment à valeurs dans $\text{Im } u$.*
- *v est linéaire, puisque u l'est.*
- *v est injective, car $\text{Ker } v = \text{Ker } u \cap S = \{0\}$.*
- *v est surjective de S sur $\text{Im } u$ car :*

*Soit $y \in \text{Im } u$. Alors, il existe $x \in E$ tq $y = u(x)$. Puisque $E = S + \text{Ker } u$, il existe $(s, z) \in S \times \text{Ker } u$ tq $x = s + z$.
On a alors $y = u(x) = u(s) + \underbrace{u(z)}_{=0_E} = u(s) = v(s)$, donc
 y possède bien un antécédent par v .*

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n + 1$ scalaires deux à deux distincts et soit

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{cases}$$

Alors :

Théorème

- 1/ u est linéaire.
- 2/ $\text{Ker } u$ est l'ensemble des multiples du polynôme $\prod_{i=0}^n (X - a_i)$ (i.e l'idéal engendré par ce polynôme)
- 3/ La restriction de u à $\mathbb{K}_n[X]$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$.
- 4/ $\forall (b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \exists P \in \mathbb{K}_n[X]$ t.q.
 $P(a_i) = b_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 P s'appelle le **polynôme interpolateur de Lagrange** relatif aux points (a_i, b_i)

Démonstration

2/ $\text{Ker } u$ est l'ensemble des polynômes tels que $P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$, i.e. l'ensemble des polynômes ayant $a_0, \dots, a_n$ pour racines. Les a_i étant distincts, $P \in \text{Ker } u$ si et seulement si P est divisible par $\prod_{i=0}^n (X - a_i)$.

Démonstration

3/ Notons $Q = \prod_{i=0}^n (X - a_i)$. Q étant de degré $n + 1$, on a

déjà montré (chapitre précédent) que

$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_n[X] + Q \cdot \mathbb{K}[X]$, donc $\mathbb{K}_n[X]$ est un supplémentaire de $\text{Ker } u$. D'après le théorème précédent, la restriction de u à $\mathbb{K}_n[X]$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\text{Im } u$.

Il en résulte que $\dim \text{Im } u = \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$, et, puisque $\text{Im } u \subset \mathbb{K}^{n+1}$, on a $\text{Im } u = \mathbb{K}^{n+1}$, d'où le résultat.

Démonstration

4/ *Le résultat précédent s'écrit aussi :*

$\forall (b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \exists ! P \in \mathbb{K}_n[X] \text{ tq } u(P) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$
ce qui est exactement le résultat demandé.

Remarque

Soit $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. u étant un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$, l'**image réciproque** par u de cette famille sera une **base de $\mathbb{K}_n[X]$** .

Notons, pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_j = u^{-1}(e_j)$. Alors L_j est le polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui prend la valeur 1 en a_j et la valeur 0 en a_i si $i \neq j$.

On a donc :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \left(\frac{X - a_i}{a_j - a_i} \right).$$

Remarque

Ainsi :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \quad L_j(a_i) = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad P = \sum_{j=0}^n b_j L_j$$

et les polynômes L_j pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ forment une *base* de $\mathbb{K}_n[X]$; dans cette base, les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ sont les $P(a_j)$.

Remarque

Voir aussi concours E3A 2017 maths 1, E3A 2021, ...

Exemple

On considère les réels suivant :

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = 3$$

Alors

$$L_0(X) = (1/24)X^4 - (1/4)X^3 + (11/24)X^2 - (1/4)X$$

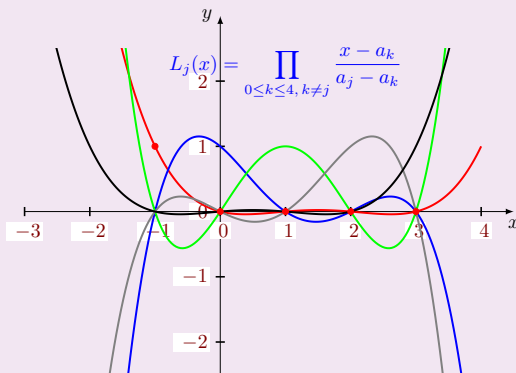
$$L_1(X) = -(1/6)X^4 + (5/6)X^3 - (5/6)X^2 - (5/6)X + 1$$

$$L_2(X) = (1/4)X^4 - X^3 + (1/4)X^2 + (3/2)X$$

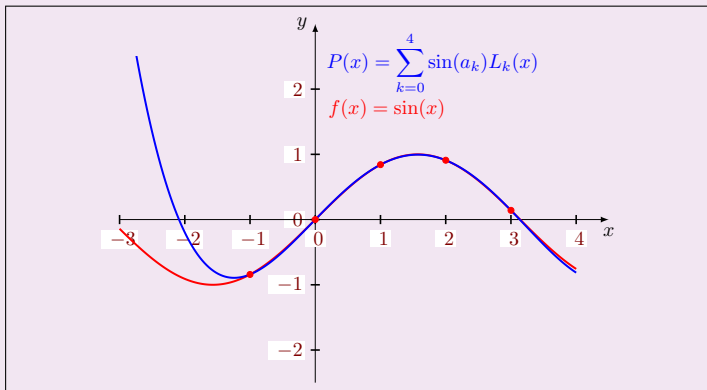
$$L_3(X) = -(1/6)X^4 + (1/2)X^3 + (1/6)X^2 - (1/2)X$$

$$L_4(X) = (1/24)X^4 - (1/12)X^3 - (1/24)X^2 + (1/12)X$$

Exemple



Exemple



Propriété

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -e-v et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Alors :

- ① $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.
- ② $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v$ et $\text{Ker}(v \circ u) \supset \text{Ker } u$.
- ③ $v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \Leftrightarrow \text{Im } u \subset \text{Ker } v$.

Démonstration

1. — Si $y \in \text{Im}(v \circ u)$ il existe $x \in E$ tel que $y = v \circ u(x)$
donc $y = v(z)$ avec $z = u(x) \in F$, d'où $y \in \text{Im } v$.
- Si $x \in \text{Ker } u$, alors $u(x) = 0_F$ d'où
 $v \circ u(x) = v(0_F) = 0_G$ donc $x \in \text{Ker}(v \circ u)$.

Démonstration

$$\begin{aligned} 2. \quad v \circ u = 0_{\mathcal{L}(E,G)} &\Leftrightarrow \forall x \in E, v[u(x)] = 0_G \Leftrightarrow \forall y \in \\ &\text{Im } u, v(y) = 0_G \Leftrightarrow \forall y \in \text{Im } u, y \in \text{Ker } v \Leftrightarrow \text{Im } u \subset \\ &\text{Ker } v. \end{aligned}$$

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v. Si u est un isomorphisme de E dans F , u^{-1} est un **isomorphisme** de F dans E .

Démonstration

Il s'agit de montrer que u^{-1} est linéaire.

Soient $x, y \in F$, et $a = u^{-1}(x)$, $b = u^{-1}(y)$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$u(\lambda a + b) = \lambda u(a) + u(b) = \lambda x + y,$$

d'où

$$u^{-1}(\lambda x + y) = \lambda a + b = \lambda u^{-1}(x) + u^{-1}(y).$$

Soit E un $\mathbb{K}$ -e-v, et E_1 et E_2 deux s-e-v **supplémentaires** de E ($E = E_1 \oplus E_2$).

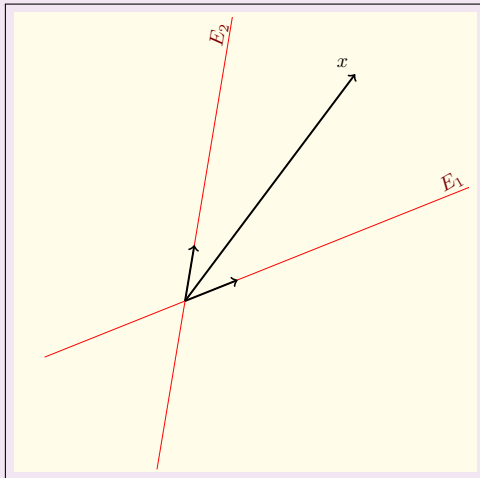
Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc de manière **unique** sous la forme : $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

Définition

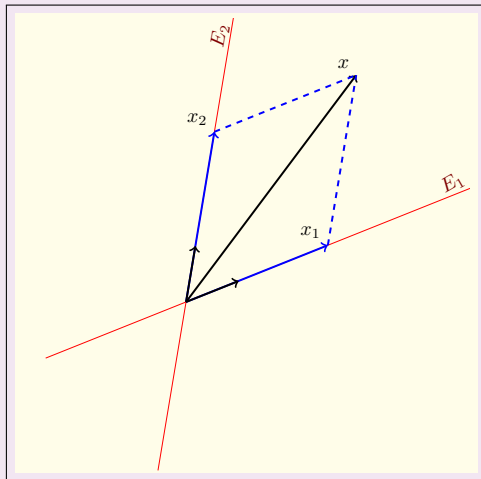
L'application $p : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x_1 \end{cases}$ s'appelle la **projection sur E_1 de direction E_2** (ou parallèlement à E_2).

L'application $s : \begin{cases} E \rightarrow E \\ x \mapsto x_1 - x_2 \end{cases}$ s'appelle la **symétrie par rapport à E_1 de direction E_2** (ou parallèlement à E_2).

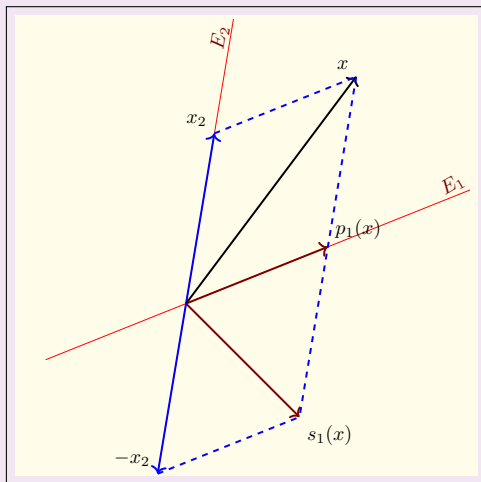
Exemple



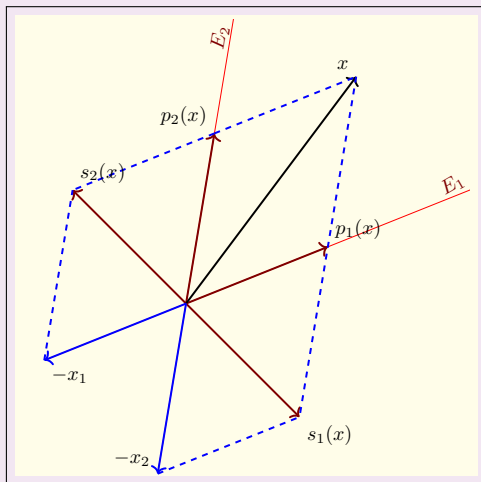
Exemple



Exemple



Exemple



Propriété

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on notera (provisoirement) :

$$\text{Inv}(u) = \{x \in E, u(x) = x\} = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$$

et

$$\text{Opp}(u) = \{x \in E, u(x) = -x\} = \text{Ker}(u + \text{id}_E)$$

Propriété

- 1 s et p sont deux endomorphismes de E .
- 2 $p^2 = p \circ p = p$
- 3 $s^2 = s \circ s = \text{Id}_E$
- 4 $\text{Inv}(p) = \text{Im } p = E_1$ et $\text{Ker } p = E_2$.
- 5 $\text{Inv}(s) = E_1$ et $\text{Opp}(s) = E_2$.
- 6 Si p_1 est la projection sur E_1 de direction E_2 , et p_2 est la projection sur E_2 de direction E_1 , $p_1 + p_2 = \text{id}_E$ (p_1 et p_2 sont dits **associés**).

Définition

(Projecteur)

Soit E un $\mathbb{K}$ -e-v et $u \in \mathcal{L}(E)$. u s'appelle un **projecteur** si $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème

Si p est un projecteur, alors :

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p, \quad \operatorname{Im} p = \operatorname{Inv}(p),$$

et p est la projection sur $\operatorname{Im} p$ de direction $\operatorname{Ker} p$.

Démonstration

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p^2 = p$.

- Montrons $\text{Inv}(p) = \text{Im } p$.
 - ▶ On a toujours $\text{Inv}(p) \subset \text{Im } p$, car, si $p(x) = x$, $x \in \text{Im } p$;
 - ▶ Réciproquement, si $y \in \text{Im } p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ d'où $p(y) = p^2(x) = p(x) = y$ et $y \in \text{Inv}(p)$.



Démonstration

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p^2 = p$.



- Montrons que $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$.

► $\text{Im } p \cap \text{Ker } p = \{0\}$ car, si $x \in \text{Im } p \cap \text{Ker } p$, on a $p(x) = 0$ d'une part, et $x \in \text{Inv}(p)$ soit $p(x) = x$ d'autre part, donc $x = 0$;

► Soit $x \in E$. On a : $x = \underbrace{p(x)}_{=x_1} + \underbrace{(x - p(x))}_{=x_2}$ avec

$x_1 \in \text{Im } p$ et $p(x_2) = p(x) - p^2(x) = 0$ soit $x_2 \in \text{Ker } p$,
donc $E = \text{Im } p + \text{Ker } p$.



Démonstration

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tq $p^2 = p$.

-
-
- Enfin, p est bien la projection sur $\text{Im } p$ de direction $\text{Ker } p$, car, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \text{Im } p \times \text{Ker } p$, on a $p(x) = p(x_1) + p(x_2) = x_1 + 0 = x_1$.

Généralisation

Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de s-e-v d'un $\mathbb{K}$ -e-v E , telle que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$. On sait alors,

$$\forall x \in E, \exists ! (x_i) \in \prod_{i=1}^p E_i, \quad x = \sum_{i=1}^p x_i.$$

on note alors, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, p_i l'application :

$$p_i : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto x_i \end{cases}. \text{ On a alors :}$$

Généralisation

- 1 $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $p_i \circ p_i = p_i$
- 2 $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, p_i est la projection sur E_i de direction $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^p E_j$.
- 3 $\sum_{i=1}^p p_i = id_E$.
- 4 $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Définition

On dit que $(p_i)_{1 \leq i \leq p}$ est la **famille de projecteurs canoniquement associée** à la décomposition de E en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Théorème

Si s est un endomorphisme involutif de E ($s^2 = \text{Id}_E$), alors :

$$E = \text{Inv}(s) \oplus \text{Opp}(s)$$

et s est la symétrie par rapport à $\text{Inv}(s)$ de direction $\text{Opp}(s)$.

Démonstration

Soit $x \in \text{Inv}(s) \cap \text{Opp}(s)$, alors

$$s(x) = x \text{ et } s(x) = -x \implies x = -x \implies x = 0.$$

Donc $\text{Inv}(s) \cap \text{Opp}(s) = \{0\}$.

Démonstration

Montrons maintenant que $E = \text{Inv}(s) + \text{Opp}(s)$, pour cela, il suffit d'écrire :

$$\forall x \in E, \quad x = (x + s(x))/2 + (x - s(x))/2 = x_1 + x_2$$

Puis,

$$s(x_1) = \frac{1}{2}(s(x) + s^2(x)) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = x_1$$

$$s(x_2) = \frac{1}{2}(s(x) - s^2(x)) = \frac{1}{2}(s(x) - x) = -x_2$$

Soit $x_1 \in \text{Inv}(s)$, $x_2 \in \text{Opp}(s)$.

Démonstration

On en déduit alors que $E = \text{Inv}(s) \oplus \text{Opp}(s)$.

Enfin, s est bien la symétrie sur $\text{Inv}(s)$ de direction $\text{Opp}(s)$, car, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \text{Inv}(s) \times \text{Opp}(s)$, on a $s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$.

Remarque

La décomposition de $x \in E$ dans la somme directe

$E = \text{Inv}(s) \oplus \text{Opp}(s)$ s'écrit :

$$x = \underbrace{\frac{x + s(x)}{2}}_{\in \text{Inv}(s)} + \underbrace{\frac{x - s(x)}{2}}_{\in \text{Opp}(s)}$$

Exemples

Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et s l'application de E dans E qui, à toute

$f \in E$, associe l'application $\tilde{f} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(-x) \end{cases}$.

On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \text{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie.

On a :

- $f \in \text{Inv}(s) \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x) \iff f$ paire ;
- $f \in \text{Opp}(s) \iff \forall x \in \mathbb{R}, -f(x) = f(-x) \iff f$ impaire.

Exemples

On retrouve ainsi le fait que l'ensemble des applications paires (resp. impaires) est un s-e-v de E , et que ces deux s-e-v sont supplémentaires. De plus, la décomposition de $f \in E$ comme somme (de façon unique) d'une application paire et d'une application impaire est :

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{impaire}}$$

Exemples

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -e-v des matrices carrées d'ordre n

$(n \in \mathbb{N}^*)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, et soit $s : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ A \longmapsto {}^tA \end{cases}$.

On vérifie facilement que s est linéaire et que $s^2 = \text{Id}_E$. Ainsi, s est une symétrie.

On a :

- $A \in \text{Inv}(s) \iff A = {}^tA \iff A \text{ symétrique ;}$
- $A \in \text{Opp}(s) \iff A = -{}^tA \iff A \text{ antisymétrique.}$

Exemples

On obtient ainsi que l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n et l'ensemble $\mathcal{AS}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques d'ordre n sont des s-e-v supplémentaires de E . De plus, la décomposition de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme somme (de façon unique) d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique est :

$$A = \underbrace{\frac{A + {}^tA}{2}}_{\text{sym.}} + \underbrace{\frac{A - {}^tA}{2}}_{\text{antisym.}}$$

Théorème

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e-vs, $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(b_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Alors :

- 1 Il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u(e_i) = b_i$ pour tout $i \in I$.
- 2 u injective $\iff (b_i)_{i \in I}$ est une **famille libre** de F .
- 3 u surjective $\iff (b_i)_{i \in I}$ est une **famille génératrice** de F .
- 4 u est un isomorphisme $\iff (b_i)_{i \in I}$ est **une base** de F .

Propriété

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -e-v de dimensions finies :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{il existe } u \text{ injective } \in \mathcal{L}(E, F) & \Longleftrightarrow \dim E \leq \dim F \\ \text{il existe } u \text{ surjective } \in \mathcal{L}(E, F) & \Longleftrightarrow \dim E \geq \dim F \\ \text{il existe un isomorphisme de } E \text{ sur } F & \Longleftrightarrow \dim E = \dim F \end{array} \right.$$

Théorème

Th. de rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e-vs, avec E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $\text{Im } u$ est de dimension finie et :

$$\dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Ker } u) = \dim E$$

Démonstration

*C'est immédiat à l'aide du théorème **d'isomorphisme** : si S est un supplémentaire de $\text{Ker } u$, alors S est isomorphe à $\text{Im } u$ (plus précisément, la restriction u_S de u à S est cet isomorphisme), donc $\dim \text{Im } u = \dim S = \dim E - \dim \text{Ker } u$*

Danger

Dans le cas $E = F$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont deux s-e-v de E dont la somme des dimensions est égale à $\dim E$, mais $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ ne sont pas forcément supplémentaires !

Exemple

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a ici $\text{Ker } u = \text{Im } u = \mathbb{R}e_1 \dots$

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -e-vs, et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\text{Im } u$ est de dimension finie, sa dimension est appelée le **rang de u** :

$$\text{rg } u = \dim(\text{Im } u).$$

Remarques

- ① Si F est de dimension finie, alors $\text{Im } u$ est de dimension finie.
- ② Si E est de dimension finie, alors $\text{Im } u$ est de dimension finie et $\text{rg } u + \dim(\text{Ker } u) = \dim E$.
- ③ Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E , $\text{rg } u$ est aussi le rang de la famille de vecteurs $(u(e_i))_{i \in I}$.

Conséquences du théorème du rang :

- ① Si E est de dimension finie :
$$u \text{ injective} \iff \text{rg } u = \dim E.$$
- ② Si F est de dimension finie :
$$u \text{ surjective} \iff \text{rg } u = \dim F.$$
- ③ Si E et F sont de dimensions finies et si $\dim E = \dim F$,
$$u \text{ injective} \Leftrightarrow u \text{ surjective} \Leftrightarrow u \text{ bijective}.$$
- ④ Soient E et F de dimensions finies et $\dim E = \dim F$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $v \circ u = \text{id}_E$.
Alors u et v sont des isomorphismes, réciproques l'un de l'autre.

Remarque

Les deux dernières propriétés *ne sont plus vraies* lorsque :

- $\dim E \neq \dim F$

par exemple, si $\dim E < \dim F$, il suffit de considérer une application linéaire u qui transforme une base de E en une famille libre mais non génératrice de F : u est injective, mais non surjective.

Remarque

Les deux dernières propriétés *ne sont plus vraies* lorsque :

- Les espaces ne sont pas de dimensions finies (même si $E = F$)
par exemple, si $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si u est l'application qui à f associe sa dérivée f' et si v est l'application qui à f associe $\left(x \mapsto \int_0^x f(t) dt\right)$, on a $u \circ v = \text{Id}_E$ mais $v \circ u \neq \text{Id}_E$.

Remarque

Ces résultats peuvent tomber en défaut si E n'est pas de dimension finie !

Considérer par ex. les applications : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$ et

$$: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array} \right. .$$

La première est surjective mais non injective ; la seconde est injective mais non surjective.

Théorème

Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \cdot \dim F.$$

Démonstration

Soit $n = \dim E$, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Considérons l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & (u(e_1), \dots, u(e_n)) \end{cases}$$

- φ est évidemment linéaire.
- On sait que : $\forall (b_1, \dots, b_n) \in F^n, \exists ! u \in \mathcal{L}(E, F)$ tq $u(e_i) = b_i$ pour tout i . Cela signifie que φ est bijective.
- φ étant un isomorphisme d'espaces vectoriels, on a $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^n = n \cdot \dim F$.

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel H de E qui admet une **droite vectorielle** pour **supplémentaire**.

Remarque

Si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, cela équivaut à $\dim(H) = n - 1$.

Propriété

Si H est un hyperplan de E , alors, pour tout vecteur $a \notin H$, on a :

$$E = H \oplus \mathbb{K}a.$$

Démonstration

H est un hyperplan donc, par définition, il existe $b \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}b$.

Soit $a \notin H$. Alors $H \cap \mathbb{K}a = \{0\}$ car $\lambda a \notin H$ sauf si $\lambda = 0$.

Démonstration

Il reste à montrer $E = H + \mathbb{K}a$. Soit $x \in E$. Il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = h + \lambda b$. Et il existe aussi $h' \in H$ et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $a = h' + \mu b$. μ ne peut pas être nul car $a \notin H$. On a donc $b = \frac{1}{\mu}(a - h')$ puis

$$x = h + \frac{\lambda}{\mu}(a - h') = \underbrace{h - \frac{\lambda}{\mu}h'}_{\in H} + \underbrace{\frac{\lambda}{\mu}a}_{\in \mathbb{K}a} \in H + \mathbb{K}a.$$

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. On appelle **forme linéaire** sur E une application linéaire de E dans le corps de base $\mathbb{K}$.

L'e-v $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E s'appelle l'e-v **dual** de E , et est noté E^* .

Remarque

Si E est de dimension finie, on a : $\dim E = \dim E^*$.

Exemples

- 1 Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in D$. L'application $\varphi : f \mapsto f(x_0)$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$.
- 2 Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. L'application $\varphi : f \mapsto \int_a^b f$ est une forme linéaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}([a, b], \mathbb{R})$.

Propriété

Toute forme linéaire non nulle est surjective.

Propriété

Toute forme linéaire non nulle est surjective.

Démonstration

En effet, si $\varphi \in E^*$ est non nulle, il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) \neq 0$, et on aura alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda = \varphi \left(\frac{\lambda}{\varphi(a)} \cdot a \right) \in \text{Im } \varphi$$

Théorème

- 1 Un s-e-v H de E est un hyperplan si et seulement si il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$, non nulle, telle que :
 $H = \text{Ker } \varphi$
- 2 Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E telles que $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } \psi$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

Démonstration

1. ► Soit H un hyperplan de E . Il existe $a \neq 0$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Il existe alors une forme linéaire φ sur E telle que
$$\begin{cases} \varphi(h) = 0 & \text{si } h \in H \\ \varphi(\lambda a) = \lambda & \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$$
 (en effet, une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux s-e-v supplémentaires).

Démonstration

1. ► Si $x \in E$, il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = h + \lambda a$.
On a alors
$$\varphi(x) = 0 \iff \varphi(h) + \lambda = 0 \iff \lambda = 0 \iff x \in H, \text{ de}$$

sorte que l'on a bien $\text{Ker } \varphi = H$.

Démonstration

1. ► *Réciproquement, si φ est une forme linéaire non nulle, soit $H = \text{Ker } \varphi$. φ étant surjective, il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) = 1$. Montrons que $E = H \oplus \mathbb{K}a$, ce qui prouvera que H est un hyperplan.*
 - *Si $x \in H \cap \mathbb{K}a$, $x \in H$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda a$. Donc $0 = \varphi(x) = \lambda \varphi(a) = \lambda$, d'où $x = 0$: $H \cap \mathbb{K}a = \{0\}$.*
 - *Si $x \in E$, on a $x = \underbrace{x - \varphi(x)a}_{=h} + \underbrace{\varphi(x)a}_{\in \mathbb{K}a}$ avec $h \in H$ puisque $\varphi(x - \varphi(x)a) = \varphi(x) - \varphi(x)\varphi(a) = 0$. Ainsi, $E = H + \mathbb{K}a$, ce qui achève cette démonstration.*

Démonstration

2. Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles telles que $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi$. Notons $H = \text{Ker } \varphi$. D'après ce qui précède, H est un hyperplan, donc il existe $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}a$. Posons $\lambda = \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}$, ce qui est possible puisque $a \notin H$ donc $\varphi(a) \neq 0$. On a alors $\psi(x) = \lambda\varphi(x)$ pour tout $x \in H$ et tout $x \in \mathbb{K}a$, donc pour tout $x \in E$.

Définition

Si H est un hyperplan de E et si $\varphi \in E^*$ est telle que $H = \text{Ker } \varphi = \{x \in E, \varphi(x) = 0\}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ s'appelle **une équation de l'hyperplan H** .